

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

“OLIMPIADA SATELOR DIN SUD-EST”, ETAPA JUDEȚEANĂ, 19 APRILIE 2016

CLASA A VIII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Determinați măsura unghiului format de dreptele $A'O$ și $B'C$.

Prof. Mirela Tarța

Soluție.

$$B'C \parallel A'D \Rightarrow m(\sphericalangle A'O, B'C) = m(\sphericalangle A'O, A'D) = m(\sphericalangle DA'O) \dots\dots\dots 3p$$

$$A'BD \text{ echilateral și } [A'O] \text{ mediană} \Rightarrow [A'O] \text{ bisectoare} \Rightarrow m(\sphericalangle DA'O) = 30^\circ \dots\dots\dots 4p$$

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{2x-8}{x^2-8x+15} - \frac{1}{x-3} \right) : \frac{1}{x^2-25}$, unde x este număr real, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 3, 5\}$. Arătați că $E(x) = x+5$, pentru orice număr real $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 3, 5\}$.

Soluție.

$$E(x) = \left(\frac{2x-8}{(x-3)(x-5)} - \frac{1}{x-3} \right) : \frac{1}{x^2-25} \dots\dots\dots 3p$$

$$E(x) = \left(\frac{2x-8-x+5}{(x-3)(x-5)} \right) \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{1} \dots\dots\dots 2p$$

$$E(x) = \frac{(x-3)}{(x-3)(x-5)} \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{1} = x+5 \dots\dots\dots 2p$$

3. Determinați numerele reale x, y, z, u știind că $x + y + z + u - 6 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}{6}$.

Prof. Dănuț Marius Necula

Soluție.

Obținem $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 6x - 6y - 6z - 6u + 36 = 0$ 2p

sau $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 + (u-3)^2 = 0$ 3p

$x = y = z = u = 3$ 2p

4. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ cu muchia de 6 cm. Dacă $M \in (VC)$, $P \in (VA)$, $S \in (VB)$ astfel încât $4 \cdot d(S, (VAC)) = 3 \cdot d(P, (VBC)) = 2 \cdot d(M, (VBA)) = 2\sqrt{6}$ cm, atunci determinați perimetrul triunghiului SPM .

Prof. Daniela și Nicolae Stănică

Soluție.

Fie $AO \perp (VBC)$ înălțimea tetraedrului și $PQ \parallel AO, Q \in VO \Rightarrow d(P, (VBC)) = PQ$

Din $\triangle VPQ \sim \triangle VAO \Rightarrow \frac{PQ}{AO} = \frac{VP}{VA}$ 1p

Înălțimea tetraedrului este $2\sqrt{6}$ cm.....1p

Folosind relația din enunț, găsim $VP = 2$ 1p

Analog găsim $VS = \frac{3}{2}$ cm, iar $VM = 3$ cm.....1p

Din $\triangle VMS$ găsim $MS = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.....1p

Din $\triangle VPS$ găsim $PS = \frac{\sqrt{13}}{2}$ cm, iar din $\triangle VPM$ găsim $PM = \sqrt{7}$ 1p

$P_{\triangle MSP} = \sqrt{7} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3} + \sqrt{13}}{2}$ cm.....1p