

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

“OLIMPIADA SATELOR DIN SUD-EST”, ETAPA JUDEȚEANĂ, 19 APRILIE 2016

CLASA A VII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Dacă $(2x+4)^2 - (x-3)^2 = (x+a)(3x+b)$, pentru orice număr real x , atunci determinați valoarea sumei $a+b$.

Soluție.

$$(2x+4)^2 - (x-3)^2 = (2x+4+x-3)(2x+4-x+3) \dots\dots\dots 3p$$

$$(2x+4)^2 - (x-3)^2 = (3x+1)(x+7) \dots\dots\dots 2p$$

$$(3x+1)(x+7) = (x+a)(3x+b), \text{ pentru orice număr real } x \Rightarrow a=7, b=1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } a+b=8 \dots\dots\dots 1p$$

2. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel DC$), $AB = 3 \cdot CD = 18$ cm și $m(\angle BAD) = 60^\circ$.
Determinați aria trapezului $ABCD$ și distanța de la punctul A la dreapta BC .

Soluție.

$$\text{Înălțimea trapezului este egală cu } 6\sqrt{3} \text{ cm} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Aria trapezului este egală cu } 72\sqrt{3} \text{ cm}^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } AD \cap BC = \{M\} \Rightarrow \text{triunghiul } MAB \text{ este echilateral} \dots\dots\dots 2p$$

$$d(A, BC) = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm} \dots\dots\dots 2p$$

3. a) Arătați că $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} = 2$.

b) Dacă $\frac{3}{2} + \frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \dots + \frac{3}{250-n} = \frac{45}{16}$, atunci determinați numărul natural n , $n \neq 250$.

prof. Adelina Ion

Soluție.

a) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} = 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \dots\dots\dots 2p$

b) $\frac{3}{2} + \frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \dots + \frac{3}{250-n} = 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{3x}{x+1} \dots\dots\dots 3p$

$\frac{3x}{x+1} = \frac{45}{16} \Leftrightarrow x = 15 \dots\dots\dots 1p$

$250 - n = 15 \cdot 16 \Leftrightarrow n = 10 \dots\dots\dots 1p$

4. În triunghiul echilateral ABC avem $AB = 6$ cm, punctul M este mijlocul laturii $[AC]$, punctul Q este mijlocul segmentului $[BM]$ și $PQ \parallel AB$, $P \in (BC)$.

a) Arătați că $QP = 1,5$ cm. b) Determinați aria patrulaterului $AQPB$.

Prof. Daniela și Nicolae Stănică

Soluție.

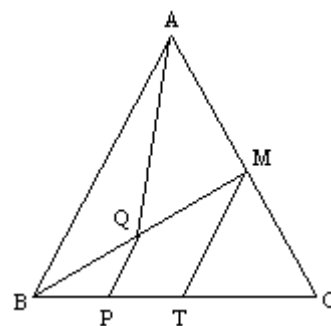
a) (3p) Fie punctul T mijlocul segmentului $[BC]$

În triunghiul BMC , $[MT]$ este mediană $\Rightarrow MT = \frac{BC}{2} = 3$ cm.

Deoarece $[MT]$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MT \parallel AB$

\Rightarrow segmentul $[QP]$ este linie mijlocie în triunghiul $BMT \Rightarrow$

$QP = \frac{MT}{2} = 1,5$ cm.



b) (4p) Aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$ cm².

Dacă notăm aria triunghiului ABC cu $16x$, atunci din proprietatea medianei $[BM]$, aria triunghiului BMC egală cu $8x$.

Avem succesiv: $[MT]$ mediană în triunghiul BMC , $[TQ]$ mediană în triunghiul BTM și $[QP]$ mediană în triunghiul $BQT \Rightarrow$ aria triunghiului BPQ este egală cu x .



Din $[AQ]$ mediană în triunghiul $ABM \Rightarrow$ aria triunghiului AQB este egală cu $4x$.

Aria patrulaterului $AQPB$ este egală cu $\frac{5}{16} \cdot 9\sqrt{3} = \frac{45\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2$