

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

“OLIMPIADA SATELOR DIN SUD-EST”, ETAPA LOCALĂ, 27 FEBRUARIE 2016

CLASA A VIII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b știind că

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{7}}} \text{ și } b = (\sqrt{50} - \sqrt{32})^{-1} : \sqrt{8}.$$

Soluție.

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$b = (\sqrt{50} - \sqrt{32})^{-1} : \sqrt{8} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot (5\sqrt{2} - 4\sqrt{2})} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 2p$$

$$m_a = \frac{5}{8}, m_g = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 3p$$

2. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu latura de lungime egală cu 10 cm se ridică perpendiculara $MA = 10\sqrt{3}$ cm. Calculați distanța de la punctul M la dreapta BC .

Soluție.

$$MA \perp (ABC), AD \perp BC, D \in (BC) \xRightarrow{T3pp} MD \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = MD \dots\dots\dots 3p$$

$$AD = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm} \dots\dots\dots 2p$$

$$T.P. \Rightarrow MD = \sqrt{300 + 75} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15} \text{ cm} \dots\dots\dots 2p$$

3. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ se consideră punctul M mijlocul segmentului $[AB]$ și $A'M \cap B'B = \{P\}$. Demonstrați că $tg(\sphericalangle DP, BC') = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție.

$$\Delta A'M \equiv \Delta PBM (C.U.) \Rightarrow BP = AA' = DD' \Rightarrow DPBD' \text{ paralelogram} \Rightarrow DP \parallel D'B \dots\dots 3p$$

$$\Delta BC'D' \text{ dreptunghic în } C' \dots\dots\dots 2p$$

$$tg(\sphericalangle DP, BC') = tg(\sphericalangle D'B, BC') = \frac{D'C'}{BC'} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

4. Se consideră numerele reale a și b , astfel încât $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x + a}{x + b}$, pentru orice $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Arătați că $a + b$ este număr întreg.

Soluție.

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3), x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{x + a}{x + b} \dots\dots\dots 2p$$

$$a + b = -3 - 1 = -4 \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 2p$$