MINISTERUL EDUCAŢIEI ,CERCETĂRII,TINERETULUI ŞI SPORTULUI

PREGĂTIRE BACALAUREAT MATEMATICĂ 2016

CLASA a XII-a -prof. GOBEJ ADRIAN

Profil MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

FIȘA NR. 1 POLINOAME

PROBLEMA NR.1

Se consideră polinomul $f = X^3 + mX - 3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 2$, arătaţi că $f(1) = 0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

BAREM PROBLEMA NR. 1

a)	$f = X^3 + 2X - 3$	**2p**
	$f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$	**3p**
b)	$f = X^3 + mX - 3$ este divizibil cu $X+1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$	**2p**
	$m = -4$	**3p**
c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2m < 0 \Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	**2p**
	$f \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow f$ are două rădăcini conjugate din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, care au modulele egale	**3p**

PROBLEMA NR.2

În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.

5p **c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

BAREM PROBLEMA NR. 2

a)	$f(\hat{0}) = \hat{0}^3 + a \cdot \hat{0} =$	**2p**
	$= \hat{0}$	**3p**
b)	$f(\hat{3}) = \hat{2} + a \cdot \hat{3}$	**2p**
	$\hat{2} + a \cdot \hat{3} = \hat{3} \Rightarrow a = \hat{2}$	**3p**
c)	$\hat{1} + a = \hat{3} + a \cdot \hat{2} \Rightarrow a = \hat{3}$	**2p**
	$f(\hat{3}) = \hat{1}$ și $f(\hat{4}) = \hat{1} \Rightarrow f(\hat{3}) = f(\hat{4})$	**3p**

PROBLEMA NR.3

Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = -1$, demonstraţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătaţi că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

BAREM PROBLEMA NR. 3

a)	$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + m =$	**3p**
	$= 0 - 0 + 0 + m = m$	**2p**
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$, $x_1x_2x_3 = 1$	**3p**
	$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)}{x_1x_2x_3} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$	**2p**
c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	**2p**
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obţine $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, contradicţie cu $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	**3p**

PROBLEMA NR.4

Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0) = 2$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g = X^2 + X - 2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstraţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

BAREM PROBLEMA NR. 4

a)	$f(0) = 0^3 - m \cdot 0 + 2 =$	**3p**
	$= 0 - 0 + 2 = 2$	**2p**
b)	Restul este $(3 - m)X$	**3p**
	$3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$	**2p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$	**2p**
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m(x_1 + x_2 + x_3) - 6 = m \cdot 0 - 6 = -6$	**3p**

PROBLEMA NR.5

Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural prim m, ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

BAREM PROBLEMA NR. 5

a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$ $=0+0+0+m=m$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**3p** **2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f(x_1)=0\Leftrightarrow m=-x_1(x_1+1)^2$ Deoarece m este prim, obținem $(x_1+1)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**2p** **3p**

PROBLEMA NR.6

Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=8$, arătaţi că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

BAREM PROBLEMA NR. 6

a)	$f(0)=0^3-4\cdot 0^2+m\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1=x_2+x_3\Leftrightarrow x_1=2$ $f(2)=0\Leftrightarrow 2m-6=0\Leftrightarrow m=3$	**2p** **3p**
c)	$f=X^3-4X^2+8X+2$, $x_1+x_2+x_3=4$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$ Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $f(0)=2$	**2p** **3p**

PROBLEMA NR.7

Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(2)-f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X+2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

BAREM PROBLEMA NR. 7

a)	$f(2)=8-4m+6-1=-4m+13$ $f(-2)=-8-4m-6-1=-4m-15\Rightarrow f(2)-f(-2)=28$	**2p** **3p**
b)	Restul împărţirii lui f la $X-2$ este $f(2)\Rightarrow f(2)=9$ Restul împărţirii lui f la $X+2$ este $f(-2)\Rightarrow f(-2)=-19$	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=3\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-6$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-3(x_1+x_2+x_3)+3=m^3-9m+3$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3\Leftrightarrow m^3-9m=0\Leftrightarrow m=-3$ sau $m=0$ sau $m=3$	**2p** **2p** **1p**

PROBLEMA NR.8

	Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m = 3$, calculaţi $f(1)$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este egal cu 2.
5p	**c)** Pentru $m = 4$, arătaţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

BAREM PROBLEMA NR. 8

a)	$f = X^3 - 2X^2 - 2X + 3$ $f(1) = 1 - 2 - 2 + 3 = 0$	**2p** **3p**
b)	$f(2) = 2 \Rightarrow 8 - 8 - 4 + m = 2$ $m = 6$	**3p** **2p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2$, $x_1x_2x_3 = -4$ $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 2 \cdot \frac{-2}{-4} = 1$	**3p** **2p**

PROBLEMA NR.9

	Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m = 4$, arătaţi că $f(4) = 8$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1 + x_2 = x_3$.
5p	**c)** Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X - 3$.

BAREM PROBLEMA NR. 9

a)	$f = X^3 - 4X^2 + 3X - 4$ $f(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 4 = 8$	**2p** **3p**
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $x_1 + x_2 = x_3 \Rightarrow x_3 = 2$ $f(2) = 0 \Leftrightarrow m = -2$	**1p** **2p** **2p**
c)	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3m + 28$ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow m = 0$ Dacă $m = 0$, atunci $f(3) = 0$, deci f se divide cu $X - 3$	**2p** **1p** **2p**

PROBLEMA NR.10

	Se consideră x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X^2 + mX + m$, unde m este un număr real.
5p	**a)** Arătaţi că f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.
5p	**c)** Determinaţi valorile reale ale lui m ştiind că $\lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert = \lvert x_3 \rvert$.

BARAM PROBLEMA NR. 10

a)	$f(-1)=-1+1-m+m=0$ Rezultă $X+1$ divide polinomul f	**2p** **3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-1,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2m$ $1-2m=11 \Rightarrow m=-5$	**2p** **2p** **1p**
c)	$x_1=-1 \Rightarrow \lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$ $x_1x_2x_3=-m$ $\lvert m\rvert=1 \Rightarrow m=-1$ sau $m=1$; ambele valori verifică cerința	**2p** **1p** **2p**