Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

<u>Clasa a III a</u>

<u>SUBIECTUL I</u>

Laura a citit 3 cărți, în total 216 pagini. Ea a observat că fiecare dintre cărți, începând cu a doua, are cu *a* pagini mai multe decât precedenta, unde *a* este cel mai mic număr de două cifre pare cu suma cifrelor 6.

Aflați câte pagini are fiecare carte citită de Laura.

Prof. Maria Neferu

<u>SUBIECTUL II</u>

Un număr impar de 3 cifre se numește *bun* dacă suma cifrelor sale este 23. a) Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr *bun*.

b) Scrieți în ordine crescătoare toate numerele *bune.*

c) Câte perechi de numere *bune* (a, b) au proprietatea că diferența (a − b) este număr *bun*?

Prof. Ion Marcel Neferu

<u>SUBIECTUL III</u>

Dintre numerele de trei cifre, considerăm, în ordine crescătoare, șirul tuturor numerelor care conțin cel puțin o dată cifra 1.

a) Calculați suma primelor trei numere din șir;

b) Scrieți ultimele 10 numere din șir și apoi precizați, dintre acestea, toate perechile (a, b) pentru care suma (a + b) se împarte exact și la 2 și la 5 .

c) Câte numere are șirul?

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL IV

Andrei are 7 ani. Când Andrei va avea vârsta tatălui său, acesta va avea 55 ani. Ce vârstă are acum tatăl lui Andrei ?

Gazeta Matematică

<u>NOTĂ</u> Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu.

Timp de lucru 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a, 9 aprilie 2016

Clasa a IV a

SUBIECTUL I

a) Calculați:

$a = 2+3\times[\ 4+5\times(6-7:7)-8]:9$

b) Aflați numărul *b* care verifică egalitatea:

$(\ b\times 4 + 4) : 4 - 4 = 44$

c) Dacă a și b sunt numerele cerute mai sus, arătați că suma (a+b) se scrie ca produsul a două numere consecutive.

Prof. Maria Neferu

SUBIECTUL II

Suma a două numere naturale este 2016. Aflați cele două numere știind că ambele se împart exact la 3, iar diferența lor e un număr de o cifră.

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL III

Considărm în ordine crescătoare, șirul numerelor de 7 cifre care încep sau se termină cu 2016.

a) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr din șir apoi calculați suma cifrelor fiecăruia din cele două numere .

b) Câte numere are șirul?

c) Ce număr din șir se află pe locul 216 ?

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL IV

a) Scrieți numărul 2015 folosind exact 15 cifre, toate egale cu 3 și unele operații aritmetice.

Elefterie Petrescu, G. M.

b) Doi bicicliști aflați la o distanță de 180 km unul de altul, pornesc (în același timp) unul spre celălalt. O albină zboară de la un biciclist la celălalt, cu viteza de 40 km/h până când aceștia se întâlnesc. Dacă fiecare biciclist merge cu viteza de 30 km pe oră, ce distanță parcurge albina?

Gazeta Matematică

NOTĂ Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu.

Timp de lucru 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudețean Memorial "Preda Filofteia"
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A V A

SUBIECTUL I

Din două orașe situate la o distanță de 1020 km au plecat în același timp două trenuri (unul spre celălalt). Primul tren are o viteză medie de 36,5 km/h. Știind că cele 2 trenuri se întâlnesc după 12 ore, calculați distanța dintre ele după:

a) 4 ore de mers.

b) 14 ore de mers.

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL II

Fie fracția $F=\frac{2016}{3528}$

a) Simplificați F până la forma ireductibilă.

b) Scrieți forma zecimală a lui F și calculați suma primelor 2016 zecimale

c) Dacă $\overline{xyzt}$ e suma cerută la b), iar A= $\overline{xy}$ + $\overline{zt}$, scrieți A ca suma a 2 pătrate perfecte.

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL III

Fie A mulțimea tuturor numerele de 4 cifre care împărțite la 20 dau restul 16.

a) Considerând elementele lui A în ordine crescătoare, pe ce loc se află 2016?

b) Arătați că suma elementelor lui A nu e pătrat perfect.

c) Câte pătrate perfecte conține conține A ?

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL IV

Determinați cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 2015, care conține cel puțin o dată ficare cifră zecimală.

Adriana Dragomir G. M.

NOTĂ Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu.
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

<u>CLASA A VI A</u>

<u>SUBIECTUL I</u> Fie A $=\{1,2,3,4,\ldots,2016\}$.

a) Scrieți cea mai mică și cea mai mare fracție cu numărătorul și numitorul din A și calculați produsul lor.

b) Câte fracții subunitare cu numărătorul și numitorul, din A se pot forma?

c) Arătați că suma fracțiilor subunitare cu numitorul 1008 sau 2016 și numărătorul din A este număr natural.

Prof. Ion Marcel Neferu

<u>SUBIECTUL II</u>

Numerele x, y, z, t sunt direct proporționale cu 3; 4; 5; 6.

a) Aflați numerele dacă $x + y + z + t = 72$.

b) Dacă A e numărul obținut prin alipirea numerelor z și y (în această ordine) cerute mai sus, calculați:

i) Câți divizori are A ?

ii) Câte numere naturale mai mici ca A nu sunt divizibile nici cu 20, nici cu 16?

Prof. Ion Marcel Neferu

<u>SUBIECTUL III</u>

Dreptele AB și CD se intersectează în O ($\widehat{AOD}$ ascuțit). Considerăm (OM bisectoarea $\widehat{AOD}$, (ON bisectoarea $\widehat{BOD}$, (OP bisectoarea $\widehat{MON}$).

a) Calculați m ($\widehat{NOP}$).

b) Dacă m($\widehat{BOP}$) $=110^0$, calculați m($\widehat{BOC}$).

c) Dacă m($\widehat{AOD}$)= 50^0 , (OQ e semidreapta opusă lui (OP, calculați măsura unghiului format de bisectoarele $\widehat{COQ}$ și $\widehat{COB}$.

Prof. Valerian Cotoi

<u>SUBIECTUL IV</u>

a) Fie A$=\left\{\frac{2011}{2};\ \frac{2012}{3};\frac{2013}{4};\ \frac{2014}{5};\ldots\ldots\ldots\right\}$. Determinați B=A∩**N.**

V. Scurtu, Gazeta Matematică

b) Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 și 13. Un *pas* înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare, scrise deja pe tablă. Arătați că indiferent câți *pași* s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86.

Iulia Cecon, Gazeta Matematică

<u>NOTĂ</u> Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu.
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudețean Memorial "Preda Filofteia"
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A VII A

SUBIECTUL I

Se dau numerele $a = 8+3\sqrt{7}$ și $b = 8-3\sqrt{7}$

a) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b;

b) Arătați că $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \in \mathbf{Q}$

c) Arătați că $a^{-1} + b^{-1} \in \mathbf{Q}$ iar $a^{-1} - b^{-1} \in \mathbf{R-Q}$.

Prof. Valerian Cotoi

SUBIECTUL II

Notăm $A(n) = n^3+22n^2+105n$, unde n e număr natural.

a) Determinați cel mai mic număr natural nenul p, astfel încât $\sqrt{p \times A(3)} \in \mathbf{Q}$

b) Determinați toate perechile de numere naturale (n, m), pentru care $A(n)=2^m$

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL III

Trapezul ABCD (AB//CD), are AB=20, AD=16, CD=32, iar perimetrul de 88.

a) Calculați aria trapezului;

b) Calculați d(M, BC), unde M e mijlocul lui (AD);

c) Arătați că diagonalele trapezului nu sunt perpendiculare.

Prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL IV

Rezolvați în **Z** ecuația: $(2015^x+2015^{-x})(1+x^2)=2$

N. Ivășchescu, Gazeta Matematică

NOTĂ Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu.

Timp de lucru 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A VIII A

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrieţi doar rezultatele. **(30 puncte)**

5p 1. Rezultatul calculului 2016-2016:9 este egal cu ....

5p 2. Dintre numerele a=7, (14) și b= 7,1(4) mai mare este numărul ....

5p 3. Media geometrică a numerelor x=$3\sqrt{7}+\sqrt{27}$ și y=$3\sqrt{7}-3\sqrt{3}$ este numărul ......

5p 4. Perimetrul triunghiului dreptunghic isoscel cu aria 32 cm^2 este egal cu ....

5p 5. Aria patrulaterului convex cu diagonalele de 8 cm, respectiv 12 cm, și unghiul dintre diagonale de 30^0 este egală cu ....cm^2

5p 6. Elevii claselor a opta dintr-o școală sunt reprezentați pe clase conform tabelului de mai jos. Numărul mediu de elevi pe clasă este de ……….. elevi.

CLASA	VIII A	VIII B	VIII C	VIII D
NR. ELEVI	25	32	31	24

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de concurs scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

5p 1. Desenaţi, pe foaia de concurs, un paralelipiped dreptunghic ABCDEFGH și completați pe desen o diagonală a acestuia.

5p 2. Media aritmetică a trei numere naturale este 38, iar media aritmetică a primelor două este 32. Aflați cele trei numere, dacă împărțimd pe primul la al doilea se obține câtul 2 și restul 4 .

5p 3. Arătați că n= $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2})-4\sqrt{2}$ este număr natural.

4. Considerăm expresia: E(x)= $\left(\frac{x+2}{x+1}-\frac{x}{1-x}+\frac{2x+3}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x^2-x}{x^2+2x}-\frac{2x}{x+1}$

5p a) Calculați E(2)

5p b) Aduceți E(x) la forma cea mai simplă și arătați că E(x) = $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

5p c) Dacă a=E(2)+E(3)+E(4)+E(5)+E(6)+E(7), verificați dacă a $\in \left(\frac{5}{24};\frac{6}{25}\right)$

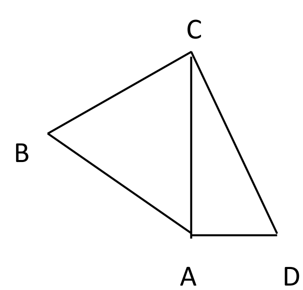
SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de concurs scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. O grădină are forma unui patrulater convex *ABCD* (vezi figura de mai jos). Diagonala *AC* împarte terenul în două triunghiuri care au perimetrele egale. Triunghiul *ABC* este echilateral cu lungimea laturii de 12 dam, iar triunghiul *ADC* este dreptunghic ($m(<A) = 90^o$).

5p a) Calculaţi perimetrul și aria triunghiului ABC .

5p b) Calculaţi aria triunghiului ACD, exprimată în hectare.

5p c) Calculaţi $\sin(\widehat{BCD})$



(vezi continuarea pe verso!)

2. Fie SABCD o piramidă patrulateră regulată, cu vârful S, înălțimea SO=$6\sqrt{3}$ cm, iar AB=12 cm. Aflați:

5p a) Volumul piramidei;

5p b) Măsura unghiului dintre două fețe laterale opuse;

5p c) Tangenta unghiului dintre planele (SAC) și (SBC).

Subiecte propuse de prof. Ion Marcel Neferu

SUBIECTUL al IV-lea - Pe foaia de concurs scrieţi rezolvarea completă. (20 de puncte)

Fie x,y∈**R,** astfel încât $x^2+y^2+4x-6y+11=0$. Arătați că $|y-x-5| \leq 2\sqrt{2}$

Vasile Scurtu, Gazeta Matematică

NOTĂ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudețean Memorial "Preda Filofteia"
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

Clasa a IX a (4 ore)

1. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică în care primul termen şi raţia sunt numere pozitive, atunci demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}+a_{2n}}<\frac{1}{a_0+a_{2n}}, \forall n \in N, n \neq 0.$$

Prof. Constantinescu Dragoş
C.N. „Alexandru Lahovari '',Rm. Vâlcea

2. a) Aratati ca $[x]+[-x]=0 <=> x \in Z$.
 b) Determinati solutiile intregi ale ecuatiei $\left[\frac{1-3x}{x+2}\right]+\left[\frac{2x-3}{x+2}\right]=-1$.

Prof. Dinu Daniel
L.T. Bratianu, Dragasani

3 In triunghiul ABC se considera punctele $\mathrm{D} \in (\mathrm{BC}), 2\overrightarrow{\mathrm{BD}}=5\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \mathrm{P} \in (\mathrm{AD}), 3\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{\mathrm{PD}}$, si $\mathrm{Q} \in (\mathrm{AB})$ astfel incat C, P si Q sa fie coliniare. Fie $E \in (AC)$ astfel incat Q, G si E sa fie coliniare, G fiind central de greutate al triunghiului ABC. Sa se calculeze $\frac{AE}{EC}$.

Prof. Dinu Daniel
L.T. Bratianu, Dragasani

4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive sistemul: $\begin{cases} a+b+c=78 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+2}=\frac{1}{9} \end{cases}$.

Prof. Smarandache Valentin
Prof. Smarandache Cristina

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

Clasa a IX-a (3 ore)

1. Se dă funcţia $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = (3-2m)x^2 - 2(m+1)x + m - 4,\ m \in \mathbb{R}$.
a) Determinaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ pentru care $x_1^2 + x_2^2 = 7 - 2x_1 - 2x_2 - x_1x_2$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f_m(x) = 0$.
b) Să se arate că intersecţia dintre reprezentarea grafică a funcţiei f_m şi axa Ox este nevidă, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
c) Să se determine punctele de intersecţie dintre reprezentările grafice ale funcţiilor $f_{\frac{-3}{2}}$ şi $f_{\frac{3}{2}}$.

prof. Steluta Neacsu
Liceul Tehnologic de Turism Calimanesti, Valcea

2. In triunghiul ABC se considera punctele M$\in (BC)$, $3\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{MC}$ si $P \in (AM), 2\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PM}.$ Fie $Q \in (AB)$ astfel incat $C,\ P$ si Q sa fie coliniare. Calculati $\frac{AQ}{QB}$.

Prof. Dinu Maria
C.N. “Gib Mihaescu”, Dragasani

3. a) Aflați funcția f:R→R, de gradul întîi pentru care f(2x-3)=2-x.
b) Dacă f:R→R, f(x)= $\frac{x-7}{3}$, rezolvați inecuația: $\frac{f(x+1)}{f(2x)} \leq 2$.
c) Găsiți a∈R pentru care funcția f:R→R, f(x)= $4 - (9-25a^2)x$ este constantă.

Prof. Smarandache Valentin
Prof. Smarandache Cristina

4. Fie functiile $\mathrm{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b} - 1,\ \mathrm{a} \neq 0$ si $\mathrm{g}: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{bx} + \mathrm{c}, \mathrm{b} \neq 0$.
a) Determinati a, b, c stiind ca a, b, c sunt termenii unei progresii aritmetice si $A(1;2) \in G_f,\ B(2;1) \in G_g$.
b) Penru $\mathrm{a} = 1,\ \mathrm{b} = 2$ si $\mathrm{c} = 3$, rezolvati ecuatia $\mathrm{f}\big(\mathrm{g}(\mathrm{x}+2)\big) = \mathrm{f}(2)\,\mathrm{x} + \mathrm{f}\big(\mathrm{g}\big(\mathrm{f}(1)\big)\big)$, x∈ R.

Prof. Dinu Maria
C.N. “Gib Mihaescu”, Dragasani

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

Clasa a X-a (4 ore)

1. În reperul cartezian xOy se considera punctele $A_{m;n}\left(|2m-5|, \left[\frac{3n-1}{2}\right]\right)$, unde $|\cdot|$, $[\cdot]$ reprezintă modulul, respectiv partea întreagă a unui număr real.
   a) Să se determine modulul vectorului $\overrightarrow{A_{0;1}A_{1;0}} + \overrightarrow{A_{-1;2}A_{2;-1}}$.
   b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $O, A_{m;-4}$ şi $A_{3;0}$ sunt coliniare.

Prof. Steluta Neacsu
Liceul Tehnologic de Turism Calimanesti, Valcea

2. a) Rezolvaţi ecuaţia $5^{X} - 3^{X} = 2$, unde x ∈ R .
   b).Rezolvaţi ecuaţia $\log_3(5^x - 2) = \log_5(3^x + 2)$, unde x ∈ R.

Prof. Constantinescu Dragoş
C.N. ,,Alexandru Lahovari ‘’,Rm. Vâlcea

3. a) Daca z ∈ C astfel incat $z^2 + \bar{z}^2 \geq 2|z|^2$, atunci z ∈ R.
   b).Aratati ca, daca ε este solutie a ecuatiei $x^2 + x + 1 = 0$, atunci, pentru orice $a, b \in R$, are loc inegalitatea:
$$(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon) \geq 0$$

***

4. Rezolvati in R ecuatia:
$$\arccos 2^{2x+3} - \arccos\left(8\sqrt{3}4^x\right) = \frac{\pi}{6}.$$

***

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

Clasa a X-a (3 ore)

1. a) Sa se determine $a \in R$ si sa se rezolve ecuatia $z^2 - (a+i) \cdot z - 2 - i = 0$, stiind ca admite o radacina reala.
   b) Se da numarul complex $z = \frac{a+i}{1+ai}$. Sa se afle $a \in R$ astfel incat z sa fie numar real.

***

2. a) Aratati ca numarul $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ este numar intreg.
   b) Calculati $[\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \cdots + [\lg 20]$.

***

3. Fie f:R→ $D, f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$.

a).Determinati$D$ astfel incat functia f sa fie surjectiva.
b).Verificati daca 5 apartine imaginii functiei$f$.

Prof. Dinu Maria
C.N. “Gib Mihaescu”, Dragasani

4. Rezolvati ecuatiile:

a) $\log_4(3^{x+1} - 5) = \log_2(3^x - 1)$.
b) $\frac{\sqrt{x+2016}+7}{7\sqrt{x+2016}+1} = \frac{2-\sqrt{x+2016}}{\sqrt{x+2016}}$.

Prof. Smarandache Valentin
Prof. Smarandache Cristina

Concursul Interjudețean Memorial "Preda Filofteia"
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A XI-A M2

1. Se considera matricele $A = \begin{pmatrix} 28 & 36 \\ 56 & 72 \end{pmatrix}$ si $X(a) = I_2 + a \cdot A, (\forall)\ a \in R$.

a) Aratati ca X^2-Tr(X)·X $+ (\det X) \cdot I_2 = O_2, (\forall)\ X \in M_2(R)$, unde $Tr(X)$ este urma matricei X.

b) Aratati ca $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 100ab), (\forall)\ a, b \in R$.

c) Rezolvati ecuatia $X\left(\frac{-2}{100}\right) \cdot X = X\left(\frac{99}{100}\right), X \in M_2(R)$.

Prof. Mihaela Duta, Rm. Valcea

2. Fie functia $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2+2x-3} + a, & x > 1 \\ \frac{2^x}{x-2} + b, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

a) Determinati a si $b \in R$ stiind ca f este continua pe R.

b).Pentru $b = 4$, determinati asimptota spre $-\infty$.

c).Pentru b=4, aratati ca ecuatia f(x)+4x=0 admite cel putin o solutie in intervalul (-1;0).

Prof. Dinu Daniel
L.T. Bratianu, Dragasani

3. Fie $f: R\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\} \to R; f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{2x+3}$, $a, b \in R$.

a) Determinati $a, b \in R$ stiind ca dreapta $y = 2x - 3$ este asimptota oblica spre $+\infty$.
b) Pentru $a = 4$, $b = 0$, scrieti ecuatia tangentei la grafic in punctul de abscisa $x_0 = 1$.
c) Calculati $\lim_{x\to 1} \frac{\ln f(x)}{x^2-1}$.

Prof. Chitu Florin
C.N. Gib Mihaescu Dragasani

3. Fie determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Scrieti $D(a,b)$ sub forma de produs.
b) In reperul cartezian se considera punctele $P_n(n, n^2), n \in N^*$. Determinati $n \in N^*, n \geq 3$ pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egala cu 1.

***

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A XI-A M1

1. Fie A o matrice pătratică de ordinul doi cu proprietățile det(A+3I_2)=4 și det(A-2I_2)=9, $A \in M_2(R)$.. Să se calculeze $(A+I_2)^{2016}$.

Prof. Smarandache Valentin
Prof. Smarandache Cristina

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 72 & 63 \\ 32 & 28 \end{pmatrix}$ si multimea $M = \left\{ X(a) \middle| X(a) = I_2 + a \cdot A, (\forall)\ a \in R \setminus \left\{-\frac{1}{100}\right\} \right\}$.

a) Aratati ca $X(a) \cdot X(b) \in M, (\forall\ ) X(a), X(b) \in M$.

b) Determinati elementele inversabile ale multimii M.

c) Determinati $X(a) \in M$ astfel incat $X(a) \cdot X(a) \cdot X(a) \cdot X(a) = X\left(-\frac{99}{100}\right)$.

Prof. Mihaela Duta, Rm. Valcea

3. Se considera sirul $(x_n)_{n\in N^*}$ unde $x_1 \in (0;1)$ si $x_{n+1} = \frac{x_n^5+3x_n}{4}$, $(\forall) n \in N^*$.
   a) Sa se arate ca $x_n \in (0;1), (\forall)\ n \in N^*$.
   b) Sa se arate ca $(x_n)_{n\in N^*}$ este convergent.
   c) Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

4. Fie functia $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x+1}, x \geq 0 \\ \frac{e^{\sqrt{x^2+4}}-e^2}{x} + a, x < 0, a \in R. \end{cases}$.

a) Determinati $a \in R$ astfel incat f sa fie continua pe R .

b) Aratati ca $(\exists)\ c \in (1,2)$ astfel incat $f(c) = 2$.

Concursul Interjudețean Memorial "Preda Filofteia"
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A XII-A M2

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 72 & 56 \\ 36 & 28 \end{pmatrix}$ si multimea $M = \{X(a) \mid X(a) = I_2 + a \cdot A, (\forall)\, a \in R\}$.
a)Calculati $X(a) \cdot X(b)$, daca $X(a), X(b) \in M$.
b) Determinati elementele inversabile ale multimii M.
c) Calculati $X\left(-\frac{1}{2016}\right) \cdot X\left(-\frac{1}{2015}\right) \cdot \ldots \cdot X(-1) \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{1}{2016}\right)$.

Prof. Mihaela Duta, Rm. Valcea

2. Fie functia $f: [1; \infty) \to R; f(x) = \frac{1}{x(1+lnx)}$.
   a) Aratati ca orice primitiva a functiei f este crescatoare pe $[1; \infty)$.
   b) Determinati numarul real $a \in (1; e^2)$ astfel incat aria suprafetei plane determinata de G_f, axa OX, dreptele de ecuatii $x = a$ si $x = e^2$ sa fie egala cu $\ln\frac{3}{2}$.
   c) Fie $g: [1; \infty) \to R$, $g(x) = x \cdot f^2(x)$. Determinati primitive G functiei g, stiind ca $A(1; 2)$ se afla pe graficul functiei G.

***

3.Fie functia $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} x + a, x < -1 \\ 3x^2 + 1, x \geq -1. \end{cases}$
   a) Determinati $a \in R$ stiind ca f admite primitive.
   b) Calculati $\int_{-1}^{1} x^{2015} \cdot \sqrt{f(x)}dx$.
   c) Determinati valoarea minima a ariei suprafetei plane deteminate de G_f, axa OX si dreptele de ecuatii $x = m$ si $x = m + 1$, $m > -1$.

***

4.Se consideră polinomul $f=X^4-3X-1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4.
   d) a) Găsiți câtul împărțirii lui f la 2X-2.
   e) b) Calculați $(2+x_1)(2+x_2)(2+x_3)(2+x_4)$.
   f) c) Arătați că $f(x_1+x_2+x_3)+f(x_1+x_2+x_4)+f(x_1+x_3+x_4)+f(x_2+x_3+x_4)=0$.

Prof. Smarandache Valentin
Prof. Smarandache Cristina

Concursul Interjudețean Memorial “Preda Filofteia”
Ediția a XXII-a
9 aprilie 2016

CLASA A XII-A M1

1. Calculati $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$.

Student Luigi-Ionut Catana
Universitatea Bucuresti, Facultatea de Matematica si Informatica

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 72 & 32 \\ 63 & 28 \end{pmatrix}$ si multimea $M = \left\{ \mathrm{X(a)} \middle| \mathrm{X(a)} = \mathrm{I_2} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{A}, (\forall)\ \mathrm{a} \in \mathrm{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{100} \right\} \right\}$.

a) Aratati ca M este parte stabila a multimii $M_2(R)$ in raport cu inmultirea matricelor.
b) Determinati elementele inversabile ale multimii M.
c) Determinati $\mathrm{X(a)} \in \mathrm{M}$ astfel incat $X^2(a) \cdot X^2(\frac{99}{100}) = X(1) \cdot$

Prof. Mihaela Duta, Rm. Valcea

3. Se considera functia f:$[0;\infty) \to R,\ f(t) = \frac{1}{(1+t^2)\cdot(1+t^3)}$.

a) Sa se arate ca $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt = \int_1^x t^3 \cdot f(t)dt,\ (\forall) x > 0$.
b) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$.

***

4. Se considera polinomul $f = X^8 + \hat{4} \cdot X^4 + 3,\ f \in Z_5[X]$.

a) Aratati ca f este reductibil peste $Z_5[X]$.
b) Aratati ca f nu are radacini in $Z_5[X]$.
c) Rezolvati ecuatia $f(\hat{4}) \cdot x^2 = \hat{2},\ x \in Z_5$.

Prof. Dinu Daniel
L.T. Bratianu, Dragasani