Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a VIII-a

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care $f(x+1) \leq x \leq f(x) + 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi tetraedrul regulat $VABC$. Pe muchia BC se consideră un punct M, iar pe muchia VA se consideră punctul N astfel încât segmentul $[MN]$ să fie minim (să aibă lungimea mai mică decât lungimea oricărui alt segment determinat de un punct al muchiei BC şi un punct al muchiei VA). Ştiind că lungimea segmentului $[MN]$ este egală cu lungimea segmentului determinat de punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axele de coordonate, măsurat în centimetri, aflaţi volumul tetraedrului $VABC$.

Soluţie.
$x \to x+1 \Rightarrow f(x) = x - 1$, deci lungimea segmentului $[MN]$ este $\sqrt{2}$cm **(2 puncte)**

$\Delta ABM \equiv \Delta VBM$ (L.U.L), deci $[MA] \equiv [MV]$.
Atunci ΔMAV este isoscel indiferent de alegerea punctului M pe muchia BC, rezultă că N este mijlocul segmentului $[VA]$. Pentru ca distanţa de la M la N să fie minimă trebuie ca $NM \perp BC$, triunghiul BNC fiind isoscel, rezultă că M este mijlocul muchiei BC. **(2 puncte)**

Deci MN este înălţimea ΔMAV în care $MA = MV = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, unde l este lungimea laturii tetraedrului regulat $VABC$.
Atunci $MN = \dfrac{l\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow l = 2$cm **(2 puncte)**
$\mathcal{V}_{VABC} = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} cm^2.$ **(1 punct)**

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a VIII-a

2. Fie a, b, c numere reale mai mari sau egale cu 2. Arătaţi că

$$a(bc-5b+8)+b(ac-5c+8)+c(ab-5a+8)\geq 12.$$

Pentru care triplete $(a,b,c,)$ are loc egalitatea?

Soluţie.
Inegalitatea se scrie echivalent
$3abc-5ac-5bc-5ab+8a+8b+8c\geq 12.$ (1 punct)
Simetria coeficienţilor ne sugerează scrierea inegalităţii sub forma

$$\begin{gathered}abc-2ac-2bc-ab+2a+2b+4c-4+\\+abc-2ab-2ac-bc+2b+2c+4a-4+\\+abc-2ab-2bc-ac+2a+2c+4b-4\geq 0,\end{gathered}$$

(2 puncte)

de unde obţinem inegalitatea echivalentă
$(a-2)(b-2)(c-1)+(b-2)(c-2)(a-1)+(c-2)(a-2)(b-1)\geq 0.$ (1 punct)
Ultima inegalitate este adevărată deoarece $a,b,c\geq 2.$ (1 punct)
Egalitatea are loc pentru tripletele (a,b,c) de forma $(2,2,t)$, $(2,t,2)$ şi $(t,2,2)$ cu $t\geq 2.$ (2 puncte)

Clasa a VIII-a

3. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se consideră

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} \text{ şi } b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Arătaţi că $[a_n] = [b_n]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Soluţie.

$(n+1+n+2+\cdots+3n+1)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdot + \frac{1}{3n+1}\right) > (2n+1)^2 \Rightarrow a_n > 1$ **(2 puncte)**

$a_n < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{2n+1 \text{ ori}} = \frac{2n+1}{n+1} < 2 \Rightarrow a_n \in (1,2)$ şi $[a_n] = 1.$ **(1 punct)**

$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ **(2 puncte)**

$b_n > 1$ **(1 punct)**

$\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2}{2\sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \Rightarrow b_n < 2$ şi $[b_n] = 1$ **(1 punct)**

Clasa a VIII-a

4. Determinaţi numerele naturale n pentru care $1 - 5^n + 5^{2n+1}$ este pătrat perfect.

Soluţie.
$5^n\left(5^{n+1}-1\right) = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$
$(m+1)-(m-1) = 2 \Rightarrow 5$ divide $m-1$ sau $m+1$ **(1 punct)**

Cazul 1. 5 divide $m - 1 \Rightarrow m - 1 = 5^n k$ şi obţinem
$5^{n+1} - 1 = (m+1)\,k = (5^n k + 2)\,k$, deci
$5^n\left(5-k^2\right) = 2k+1$
pentru $k = 1$ nu sunt soluţi
pentru $k = 2$ se obţine soluţia $n = 1$
pentru $k \geq 3$ nu se obţin soluţii. **(3 puncte)**

Cazul 2. 5 divide $m + 1 \Rightarrow m + 1 = 5^n k$ şi obţinem
$5^{n+1} - 1 = (m-1)\,k = (5^n k - 2)\,k$, deci
$5^n\left(k^2-5\right) = 2k-1$
pentru $k \leq 3$ nu se obţin soluţii.
pentru $k \geq 4$ se obţine
$5^n\left(k^2-5\right) > 5\,(k+2)\,(k-3) \geq 5k+10 > 2k-1$ **(3 puncte)**