Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a VII-a

1. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$ considerăm $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ şi

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Arătaţi că $19 < S_{16} < 20$.

Soluţie.
Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, avem

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{şi} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

şi atunci

$$S_{16} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{17}{16} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{16}\right) = 16 + A,$$ **(2 puncte)**

unde

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16}.$$

Întrucât

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 4.\frac{1}{4} = 1, \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{15} > 8.\frac{1}{8} = 1,$$

obţinem că

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right) + \frac{1}{16} <$$
$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 1 + 1 + \frac{1}{16} = 3 + \frac{24 + 16 + 3}{48} = 3 + \frac{43}{48} < 4$$

şi deci $S_{16} = 16 + A < 16 + 4 = 20$. **(3 puncte)**

Pe de altă parte, deoarece

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4.\frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > 8.\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

deducem că

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) >$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

şi deci $A = 16 + A > 16 + 3 = 19$. **(2 puncte)**

Clasa a VII-a

2. Aflaţi aria paralelogramului $ABCD$ pentru care distanţa de la punctul A la dreapta BD este 8cm, $6 \cdot AC = 5 \cdot AB$ şi $13 \cdot CD = 6 \cdot BD$.

Soluţie.
Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi M proiecţiile punctului A pe BD

ΔOAB dreptunghic în A **(3 puncte)**

$AB = \frac{104}{5}$ **(2 puncte)**

$AC = \frac{52}{3}$ **(1 punct)**

Aria patrulaterului $ABCD$ este $\frac{5408}{15}$ **(1 punct)**

Clasa a VII-a

3. Arătaţi că

$$\frac{(x^2+1)^6}{2^7}+\frac{1}{2}\geq x^5-x^3+x$$

oricare ar fi $x \geq 0$.

Soluţie. $x^2+1\geq 2x \Rightarrow \dfrac{(x^2+1)^7}{2^7}\geq\dfrac{(2x)^7}{2^7}=x^7$ **(2 puncte)**

$(x^2+1)\left(\dfrac{(x^2+1)^6}{2^7}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(x^2+1)^7}{2^7}+\dfrac{x^2+1}{2}\geq x^7+x$ **(2 puncte)**

$x^7+x=x\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$ **(2 puncte)**

Soluţia **(1 punct)**

Clasa a VII-a

4. Fie p un număr prim şi $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$, astfel încât $p \mid \left(n^6 - 1\right)$. Arătaţi că $n > \sqrt{p} - 1$.

Soluţie

$n^6 - 1 = (n-1)(n+1)\left(n^2 - n + 1\right)\left(n^2 + n + 1\right)$ **(1 punct)**

p divide $n^6 - 1$ implică
p divide cel puţin unul dintre numerele $n-1$, $n+1$, $n^2 - n + 1$, $n^2 + n + 1$ **(2 puncte)**

$n - 1 < n + 1 \leq (n-1)n + 1 = n^2 - n + 1 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$
$\Rightarrow p < (n+1)^2$ **(3 puncte)**

Soluţia **(1 punct)**