Clasa a VI-a

1. Determinaţi numărul natural A care are produsul divizorilor săi naturali egal cu $7^{2033136}$.

Soluţie.

A este putere a lui 7 **(2 puncte)**

$A = 7^n$ are divizorii $1, 7, 7^2, \ldots, 7^n$ **(2 puncte)**

$7^{1+2+\cdots+n} = 7^{2033136}$ **(2 puncte)**

$\frac{n(n+1)}{2} = 2033136 \Rightarrow n = 2016$ **(1 punct)**

Clasa a VI-a

2. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z şi t pentru care

$$\frac{111}{77} < x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z + \cfrac{t}{13}}} < \frac{114}{79}.$$

Soluţie.
Din inegalităţile

$$1 + \frac{34}{77} = \frac{111}{77} < x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z + \cfrac{t}{13}}} < \frac{114}{79} = 1 + \frac{35}{79}$$

rezultă $x = 1$ şi

$$2 + \frac{9}{35} = \frac{79}{35} < y + \cfrac{1}{z + \cfrac{t}{13}} < \frac{77}{34} = 2 + \frac{9}{34}.$$ **(3 puncte)**

Se obţine $y = 2$ şi
$3 + \frac{7}{9} = \frac{34}{9} < z + \frac{t}{13} < \frac{35}{9} = 3 + \frac{8}{9}$. **(2 puncte)**
Se obţine $z = 3$ şi inegalităţile

$$\frac{7}{9} < \frac{t}{13} < \frac{8}{9}.$$

Atunci

$$10 < \frac{7 \cdot 13}{9} < t < \frac{8 \cdot 13}{9} < 12$$

de unde se obţine $t = 11$. Rspuns $(x, y, z, t) = (1, 2, 3, 11)$. **(2 puncte)**

Clasa a VI-a

3. În triunghiul ABC, măsurile unghiurilor $\angle A$, $\angle B$, respectiv $\angle C$, sunt invers proporţionale cu numerele $\frac{16}{3}$, $\frac{4}{3}$ şi $1,(3)$. Fie $D \in (AC)$ şi $E \in (AB)$ astfel încât $m(\angle ABD) = 20°$ şi $m(\angle ACE) = 30°$. Aflaţi măsura unghiului $\angle ADE$.

Soluţie.

$m(\angle A) = 20°$, $m(\angle B) = 80°$, $m(\angle C) = 80°$, deci ΔABC este isoscel **(2 puncte)**

Fie $M \in (AC)$ astfel încât $m(\angle MBC) = 20°$

$m(\angle CEB) = m(\angle BCE) = 50° \Rightarrow [BC] \equiv [BE]$

$m(\angle BMC) = m(\angle BCM) = 80° \Rightarrow [BC] \equiv [BM]$

deci $[BM] \equiv [BE]$ **(2 puncte)**

Deoarece $m(\angle EBM) = 60°$, triunghiul EBM este echilateral

deci $[EB] \equiv [BM] \equiv [EM] \equiv [BC]$

$m(\angle DBM) = m(\angle BDM) = 40° \Rightarrow [BM] \equiv [DM]$ **(2 puncte)**

Deci $[DM] \equiv [EM]$, triunghiul EMD este isoscel cu $m(EMD) = 40° \Rightarrow m(ADE) = 110°$ **(1 punct)**

Clasa a VI-a

4. Pe o dreaptă se consideră punctele A_1, A_2, A_3, ..., în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1$cm, $A_2A_3 = 2$cm, $A_3A_4 = 4$cm, $A_4A_5 = 8$cm şi aşa mai departe. Arătaţi că există numerele naturale m şi n, cu $m < n$ pentru care $A_mA_n = 2016$cm.

Soluţie.

$2016 = 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ **(3 puncte)**

Se determină

$A_6A_7 = 2^5$cm, $A_7A_8 = 2^6$cm, $A_8A_9 = 2^7$cm, $A_9A_{10} = 2^8$cm, $A_{10}A_{11} = 2^9$cm, $A_{11}A_{12} = 2^{10}$cm **(2 puncte)**

deci segmentul A_6A_{12} are lungimea 2016cm. **(2 puncte)**