Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a V-a

Barem

1. Determinaţi numerele nenule a, b şi c pentru care

$$\overline{abc} = \frac{\overline{aab}}{a} + \frac{\overline{bc}}{b},$$

unde numerele $\overline{abc}$, $\overline{aab}$ şi $\overline{bc}$ sunt scrise în baza 10.

Soluţie.
Suma din membrul drept se poate scrie sub forma
$\dfrac{\overline{aab}}{a} + \dfrac{\overline{bc}}{b} = \dfrac{a\cdot 110 + b}{a} + \dfrac{b \cdot 10 + c}{b} = 120 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}.$ (1 punct)
Cum $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \leq 10$ (1 punct)
se obţine
$\overline{abc} = 120 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \leq 130$, deci $a = 1$. (1 punct)
Atunci egalitate de mai sus devine
$100 + \overline{bc} = 120 + b + \frac{c}{b} \iff 9b + c = 20 + \frac{c}{b} \iff 9b + c - 20 = \frac{c}{b}$. (1 punct)
Deoarece $9b + c - 20 \in \mathbb{N}$, rezultă $\frac{c}{b} \in \mathbb{N}$, deci $b | c$. (1 punct)
Atunci, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $c = bk$.
Se obţine $b = \dfrac{20 + k}{9 + k} \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică $k = 2$. Rezultă $b = 2$ şi $c = 4$. (1 punct)

Soluţie $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. (1 punct)

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a V-a

Barem

2. Se consideră următorul tablou de numere naturale, aşezate pe rânduri şi coloane

1	2	4	7	11	...
3	5	8	12	...	...
6	9	13	...	...	...
10	14	...	...	...	...
15	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

a) Calculaţi suma numerelor de pe rândul al şaptelea, începând cu primul număr şi până la numărul care se află la intersecţia rândului al şaptelea cu coloana 10.

b) Aflaţi numărul liniei şi numărul coloanei din tablou pe care apare numărul 1964, anul în care academicianul Grigore C. Moisil a primit titlul de *Om de Ştiinţă Emerit.*

Soluţie.

a) Primul element de pe rândul 7 este 28

Al doilea element de pe rândul 7 este $28 + 7$

$\vdots$

Al zecelea element de pe rândul 7 este $28 + 7 + 8 + 9 + \cdots + 15$ (2 puncte)

$S = 20 \cdot 28 + 9 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 11 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 15 = 715$ (1 punct)

b)

Primul element de pe rândul 1 este $1 = 1$

Primul element de pe rândul 2 este $3 = 1 + 2$

Primul element de pe rândul 3 este $6 = 1 + 2 + 3$

Primul element de pe rândul 4 este $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

$\vdots$

Primul element de pe rândul n este $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (1 punct)

$1953 = \dfrac{62 \cdot 63}{2} < 1964 < \dfrac{63 \cdot 64}{2} = 2016$ (2 puncte)

Dacă 2016 se află pe rândul 63, coloana 1, atunci 1964 se află cu 52 de rânduri mai sus şi cu 52 de coloane mai la dreapta, adică pe rândul al 11-lea şi pe coloana 53. (1 punct)

Concursul Interjudețean de Matematică și Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediția a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a V-a

Barem

3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică relația

$$a^b \cdot (b^a + b^c) = 2016.$$

Soluție.
Pentru $b = 1$ se obține $a \cdot 2 = 2016$, deci soluția este $a = 1008$, $b = 1$ și $c \in \mathbb{N}$. (1 punct)
$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ (1 punct)
Caz 1. Pentru $a = 2$ și $b = 5$ ecuația $5^c = 38$ nu are soluție în $\mathbb{N}$. (1 punct)
Caz 2. Pentru $a = 2$ și $b = 4$ ecuația $4^c = 110$ nu are soluție în $\mathbb{N}$. (1 punct)
Caz 3. Pentru $a = 2$ și $b = 3$ ecuația $3^c = 243$ are soluția $c = 5$. (1 punct)
Caz 4. Pentru $a = 2$ și $b = 2$ ecuația $2^c = 500$ nu are soluție în $\mathbb{N}$. (1 punct)
Caz 5. Pentru $a = 3$ și $b = 2$ ecuația $2^c = 216$ nu are soluție în $\mathbb{N}$. (1 punct)

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXI-a, Satu Mare, 8–11 aprilie 2016

Clasa a V-a

Barem

4. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 385, 386\}$. Arătaţi că oricum am alege 194 de elemente din mulţimea A, există printre ele două a căror sumă este un cub perfect.

Soluţie.

Se consieră $A_x = \{x, 343 - x\}$ cu $x = \overline{1, 171}$ şi $A_y = \{y + 171, 558 - y\}$ cu $y = \overline{172, 193}$ **(2 puncte)**

Există 193 de mulţimi cu
proprietate că suma elementelor din fiecare mulţime este un cub perfect şi **(2 puncte)**
$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_{193}$ **(1 puncte)**

Deci, oricum se vor alege 194 de elemente din A vor exista printre ele două care au suma un cub perfect ($243 = 7^3$ şi $729 = 9^3$). **(2 puncte)**