1. Să se determine suma S a soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 4x^2 = 5x$.

   a) $S = 0$; b) $S = 6$; c) $S = 4$; d) $S = \sqrt{2}$; e) $S = 5$; f) $S = 2$.

2. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+1}{10^k}$.

   a) $L = \infty$; b) $L = \frac{10}{9}$; c) $L = \frac{10}{81}$; d) $L = \frac{1000}{9}$; e) $L = \frac{100}{81}$; f) $L = \frac{9}{10}$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuaţia $m(x+1) = e^{|x|}$ are exact două soluţii reale şi distincte.

   a) $m \in (1, \infty)$; b) $m \in \left(-\infty, -e^2\right) \cup (1, \infty)$; c) $m \in \left(-\infty, -e^2\right] \cup [1, \infty)$;
   d) $m \in \left(-\infty, -e^2\right) \cup (0, 1)$; e) nu există m;
   f) nici una dintre celelalte afirmaţii nu este adevărată.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

   a) -4; b) 2; c) 3; d) ∞; e) 0; f) 1.

5. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

   a) $\ell = 2$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) limita nu există; e) $\ell = 0$; f) $\ell = -3$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $B = \frac{1}{2}\left(A^2 + A\right)$.

   a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; f) $B = \frac{1}{2}A$.

7. Să se determine n natural dacă $C_n^4 = \frac{5}{6} n\,(n-3)$.

   a) $n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 4$; d) $n = 6$; e) $n = 12$; f) nu există n.

8. Să se determine două numere reale strict pozitive x şi y astfel încât

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

   a) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; c) $x = 0, y = 0$;
   d) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; e) $x = 1, y = 0$; f) $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

9. Câte numere complexe distincte z verifică relaţia $z \cdot \bar{z} = 1$?
   a) 3; b) două; c) nici unul; d) 1; e) 4; f) o infinitate.

10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă inecuaţia $e^{2x} + me^x + m - 1 > 0$ este verificată pentru orice x real.

    a) nu există m; b) $m \in (1, \infty)$; c) $m = 1$; d) $m \in (-\infty, 1]$; e) $m \in [-1, 1]$; f) $m \in [1, \infty)$.

11. Să se determine câtul împărţirii polinomului $f = X^3 + X^2 + 2X - 3$ la $g = X^2 + 2X - 3$.

    a) $X + 1$; b) $X - 1$; c) $X + 2$; d) X^2; e) $X + 3$; f) $X + 4$.

12. Să se calculeze $f'(1)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

    a) 2; b) 0; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) -3.

13. Să se calculeze $E = 0,02 \cdot \frac{314}{3,14} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}$.

    a) $E = 30$; b) $E = \pi$; c) $E = 3$; d) $E = \sqrt{3}$; e) $E = 1$; f) $E = 300$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0$.

    a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; b) $x_{1,2} = \pm 1$; c) $x = 2$; d) $x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}$; e) $x = 0$; f) $x_{1,2} = \pm i$.

15. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), $n \geq 1$, ştiind că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

a) 100; b) 50; c) nu se poate calcula; d) 0; e) 20; f) 2000.

16. Se consideră mulţimea $M = \{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Atunci

a) $M = \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$; b) $M = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$; c) $M = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$; d) $M = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$; e) $M = \mathbb{R}$; f) $M = \varnothing$.

17. Să se determine elementul neutru pentru legea de compoziţie

$$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$$

definită pe mulţimea $\mathbb{R}$.

a) -2; b) 1; c) 0; d) 3; e) nu există; f) -4.

18. Să se calculeze aria mulţimii

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq xe^{x+1}\}.$$

a) $\ln 2$; b) e^2; c) $2e$; d) $e + 1$; e) e; f) $2 \ln 2$.

1. Să se determine suma S a soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 4x^2 = 5x$.

   a) $S = 0$; b) $S = 6$; c) $S = 4$; d) $S = \sqrt{2}$; e) $S = 5$; f) $S = 2$.

   Soluţie. Din relaţiile lui Viete rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

2. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+1}{10^k}$.

   a) $L = \infty$; b) $L = \frac{10}{9}$; c) $L = \frac{10}{81}$; d) $L = \frac{1000}{9}$; e) $L = \frac{100}{81}$; f) $L = \frac{9}{10}$.

   Soluţie. Avem $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)(\frac{1}{10})^k$. Fie $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{k+1}$. Pentru $x \neq 1$ avem suma unei progresii geometrice de raţie x deci $f(x) = \dfrac{x^{n+2} - x}{x-1}$. Derivând obţinem $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \dfrac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$. Pentru $x = \dfrac{1}{10}$, rezultă $S_n = \dfrac{\frac{n+1}{10^{n+2}} - \dfrac{n+2}{10^{n+1}} + 1}{(\frac{9}{10})^2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{10^{n+2}} = 0$, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{100}{81}$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuaţia $m(x+1) = e^{\,|x|}$ are exact două soluţii reale şi distincte.

   a) $m \in (1, \infty)$; b) $m \in \left(-\infty, -e^2\right) \cup (1, \infty)$; c) $m \in \left(-\infty, -e^2\right] \cup [1, \infty)$;
   d) $m \in \left(-\infty, -e^2\right) \cup (0, 1)$; e) nu există m;
   f) nici una dintre celelalte afirmaţii nu este adevărată.

   Soluţie. Cum $x = -1$ nu este soluţie, ecuaţia se scrie $m = \frac{e^{|x|}}{x+1}$. Funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1} - m$ se scrie desfăşurat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1} - m, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{e^{x}}{x+1} - m, & x \in [0, \infty) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{e^{x}\cdot x}{(x+1)^2}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

   Pentru şirul lui Rolle se consideră valorile $\{-\infty, -2, -1, 0, \infty\} \subset \bar{\mathbb{R}}$,

$m\backslash x$	$-\infty$	-2	-1	0	∞	
$f(x)$	$-\infty$	$-m - e^2$	$-\infty\vert\infty$	$1 - m$	∞	Discuţie
$m \in (-\infty, -e^2)$	$-$	$+$	$-\vert+$	$+$	$+$	$x_1 \neq x_2$
$m = -e^2$	$-$	0	$-\vert+$	$+$	$+$	$x_1 = x_2 = -2$
$m \in (-e^2, 1)$	$-$	$-$	$-\vert+$	$+$	$+$	nu are rădăcini
$m = 1$	$-$	$-$	$-\vert+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 0$
$m \in (1, \infty)$	$-$	$-$	$-\vert+$	$-$	$+$	$x_1 \neq x_2$

   Deci $m \in (-\infty, -e^2) \cup (1, \infty)$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

   a) -4; b) 2; c) 3; d) ∞; e) 0; f) 1.

   Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = 3$.

5. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}\, dx$.

   a) $\ell = 2$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) limita nu există; e) $\ell = 0$; f) $\ell = -3$.

Soluţie. Fie $I_n = \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}dx$, pentru $n \geq 2$ avem

$$I_n = \int_0^2 \frac{n-x}{n+x}dx = \int_0^2 \left(\frac{2n}{x+n} - 1\right) dx = 2n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - 2 = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n} - 2 = 4\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} - 2.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 4\ln e - 2 = 4 - 2 = 2.$

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $B = \frac{1}{2}\left(A^2 + A\right)$.

   a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; f) $B = \frac{1}{2}A$.

   Soluţie. Obţinem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$; $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Să se determine n natural dacă $C_n^4 = \frac{5}{6}n\,(n-3)$.

   a) $n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 4$; d) $n = 6$; e) $n = 12$; f) nu există n.

   Soluţie. Avem $n \geq 4$ şi $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{5n(n-3)}{6} \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 20$, deci $n = 6$.

8. Să se determine două numere reale strict pozitive x şi y astfel încât

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

   a) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; c) $x = 0, y = 0$;
   d) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; e) $x = 1, y = 0$; f) $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

   Soluţie. Din $\begin{cases} x, y > 0, \quad x + y = xy = (x-y)(x+y) \\ x + y = (x-y)(x+y) \end{cases}$ rezultă $x - y = 1$. Din $x + y = xy$, prin înlocuirea lui $x = y + 1$, obţinem

$$y + 1 + y = (y+1)y \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

   Dar $y > 0$, deci $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

9. Câte numere complexe distincte z verifică relaţia $z \cdot \bar{z} = 1$?
   a) 3; b) două; c) nici unul; d) 1; e) 4; f) o infinitate.

   Soluţie. Avem $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Deci $z = \cos\alpha + i\sin\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)$ şi deci o infinitate de soluţii.

10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă inecuaţia $e^{2x} + me^x + m - 1 > 0$ este verificată pentru orice x real.

    a) nu există m; b) $m \in (1, \infty)$; c) $m = 1$; d) $m \in (-\infty, 1]$; e) $m \in [-1, 1]$; f) $m \in [1, \infty)$.

    Soluţie. Notăm $e^x = y$, iar condiţia devine $y^2 + my + m - 1 > 0, \forall y > 0$. Descompunem $y^2 + my + m - 1 = (y-1)(y+1) + m(y+1) = (y+1)(y-1+m) > 0, \forall y > 0$. Dacă $y \to 0$, se obţine condiţia necesară (care este şi suficientă) $m \geq 1$.

11. Să se determine câtul împărţirii polinomului $f = X^3 + X^2 + 2X - 3$ la $g = X^2 + 2X - 3$.

    a) $X + 1$; b) $X - 1$; c) $X + 2$; d) X^2; e) $X + 3$; f) $X + 4$.

    Soluţie. Aplicând teorema împărţirii cu rest obţinem $X^3 + X^2 + 2X - 3 = (X^2 + 2X + 3)(X - 1) + X$, deci câtul este $X - 1$.

12. Să se calculeze $f'(1)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

    a) 2; b) 0; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) -3.

    Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$. Deci $f'(1) = \frac{1}{2}$.

13. Să se calculeze $E = 0,02 \cdot \dfrac{314}{3,14} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{4}}$.

a) $E = 30$; b) $E = \pi$; c) $E = 3$; d) $E = \sqrt{3}$; e) $E = 1$; f) $E = 300$.

Soluţie. $E = \dfrac{2}{100} \cdot \dfrac{314}{314} \cdot 100 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0$.

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; b) $x_{1,2} = \pm 1$; c) $x = 2$; d) $x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}$; e) $x = 0$; f) $x_{1,2} = \pm i$.

Soluţie. Avem $\sqrt{x^2+1} = 1$. Prin ridicare la pătrat, egalitatea devine $x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$, deci $x = 0$.

15. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), $n \geq 1$, ştiind că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

a) 100; b) 50; c) nu se poate calcula; d) 0; e) 20; f) 2000.

Soluţie. Din $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$, rezultă $a_1 + 5r + a_1 + 8r + a_1 + 11r + a_1 + 14r = 20$, deci $2a_1 + 19r = 10$. Prin urmare $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20})20}{2} = (2a_1 + 19r)10 = 100$.

16. Se consideră mulţimea $M = \{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Atunci

a) $M = \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$; b) $M = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$; c) $M = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$; d) $M = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$; e) $M = \mathbb{R}$; f) $M = \varnothing$.

Soluţie. Mulţimea valorilor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$ este $\left[-\frac{\triangle}{4a}, \infty\right)$. În cazul nostru $\operatorname{Im} f = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.

17. Să se determine elementul neutru pentru legea de compoziţie

$$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$$

definită pe mulţimea $\mathbb{R}$.

a) -2; b) 1; c) 0; d) 3; e) nu există; f) -4.

Soluţie. Din $x \circ e = x$ şi $e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă $xe + 3x + 3e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+3)(e+2) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = -2$.

18. Să se calculeze aria mulţimii

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq xe^{x+1}\}.$$

a) $\ln 2$; b) e^2; c) $2e$; d) $e + 1$; e) e; f) $2\ln 2$.

Soluţie. Folosind integrarea prin părţi rezultă aria

$$A = \int_0^1 xe^{x+1}dx = xe^{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = e^2 - e^2 + e = e.$$

1. Să se calculeze $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)$.

   a) ∞; b) -2; c) 2; d) $-\infty$; e) nu există; f) 0.

2. Se consideră funcţia $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0 \\ m, & x=0 \\ 1-x^2, & x<0. \end{cases}$

   Să se determine m real astfel încât să existe $f'(0)$.

   a) -1; b) 2; c) -2; d) 1; e) 0; f) $m\in(-1,1)$.

3. Să se determine numărul întreg cel mai apropiat de $\sqrt[4]{44}$.

   a) 3; b) 6; c) 2; d) 4; e) 5; f) 7.

4. Câte cifre în baza 10 are numărul

$$N=1+2\cdot 10+3\cdot 10^2+\cdots+9\cdot 10^8+10\cdot 10^9\quad ?$$

   a) 11; b) 14; c) 9; d) 10; e) 12; f) 8.

5. Să se calculeze $f''(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\,e^x+\ln(x^2+1)$.

   a) 4; b) -1; c) 6; d) 0; e) 2; f) 8.

6. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între curba de ecuaţie $y=x\,e^x$ şi dreptele $x=-1$, $x=0$, $y=0$.

   a) $1-\frac{2}{e}$; b) 2; c) 3; d) -1; e) -2; f) e.

7. Să se calculeze integrala $\int_3^{19}\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ \mathrm{d}x$.

   a) $\frac{38}{3}$; b) $\frac{19}{2}$; c) $\frac{39}{2}$; d) $\frac{18}{5}$; e) $\frac{36}{5}$; f) $\frac{38}{5}$.

8. Fie a şi b numere reale astfel încât $-5<a<2$ şi $-7<b<1$. Atunci valorile posibile ale produsului ab sunt cuprinse în intervalul:

   a) $(2,35)$; b) $(-14,7)$; c) $(-12,3)$; d) $(-14,35)$; e) $(-35,2)$; f) $(-14,2)$.

9. Se consideră permutările

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\qquad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}.$$

   Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{11}\cdot x=\tau$.

   a) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$; b) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$; c) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$;
   d) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$; e) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; f) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$.

10. Dacă $2x-y+z=0$, $x+y-z=0$ şi $y\neq 0$, să se calculeze valoarea raportului

$$\frac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

   a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 3; f) 0.

11. Valoarea raportului $\frac{\ln 15}{\lg 15}$ este

   a) $\frac{e}{15}$; b) 15; c) 5; d) $\lg e$; e) $\ln 10$; f) 1.

12. Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $x^3+x+\hat{2}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$.

   a) $\hat{0}$; b) $\hat{4}$; c) $\hat{5}$; d) $\hat{1}$; e) $\hat{3}$; f) $\hat{2}$.

13. Robinetul A umple un rezervor gol în două ore, iar robinetul B umple acelaşi rezervor în patru ore. În câte minute vor umple acelaşi rezervor gol robinetele A şi B curgând împreună ?

    a) 40 min; b) 80 min; c) 100 min; d) 360 min; e) 180 min; f) 60 min.

14. Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$?

    a) 6; b) 4; c) 5; d) 24; e) nici unul; f) 25.

15. Să se determine m real dacă există o singură pereche (x, y) de numere reale astfel încât $y \geq x^2 + m$ şi $x \geq y^2 + m$.

    a) nu există m; b) $m = \frac{1}{4}$; c) $m = 0$; d) $m \geq \frac{1}{8}$; e) $m < \frac{1}{8}$; f) $m = 1$.

1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)$.

   a) ∞; b) -2; c) 2; d) $-\infty$; e) nu există; f) 0.

   Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}=-2.$$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ m, & x=0\\ 1-x^2, & x<0.\end{cases}$

   Să se determine m real astfel încât să existe $f'(0)$.

   a) -1; b) 2; c) -2; d) 1; e) 0; f) $m\in(-1,1)$.

   Soluţie. Continuitatea în 0 este asigurată de condiţiile $l_s(0)=f(0)=l_d(0)$ şi deci $m=1$. Pentru $m=1$ funcţia f este continuă în 0 şi $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$. Din consecinţa teoremei lui Lagrange rezultă că f este derivabilă în 0 şi $f'(0)=0$.

3. Să se determine numărul întreg cel mai apropiat de $\sqrt[4]{44}$.

   a) 3; b) 6; c) 2; d) 4; e) 5; f) 7.

   Soluţie. Folosim monotonia funcţiilor $(\,\cdot\,)^4$ şi $\sqrt[4]{\cdot}$ pentru argument real pozitiv. Dacă $m,n\in\mathbb{N}$, avem $m\geq\sqrt[4]{44}\geq n\Leftrightarrow m^4\geq44\geq n^4$. Cele mai apropiate puteri de numere naturale care încadrează numărul 44 sunt $3^4=81>44$ şi $2^4=16<44$. Dar $81-44=37>44-16=28$. Deci întregul cel mai apropiat de $\sqrt[4]{4}$ este 2.

4. Câte cifre în baza 10 are numărul

$$N=1+2\cdot10+3\cdot10^2+\cdots+9\cdot10^8+10\cdot10^9\quad ?$$

   a) 11; b) 14; c) 9; d) 10; e) 12; f) 8.

   Soluţie. Avem $10\cdot10^9<N<10^9+10\cdot10^9$ deci $10^{10}<N<10^{11}$, adică N are 11 cifre.

5. Să se calculeze $f''(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\,e^x+\ln(x^2+1)$.

   a) 4; b) -1; c) 6; d) 0; e) 2; f) 8.

   Soluţie. Avem $f'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{2x}{x^2+1}$ şi

$$f''(x)=(x+2)e^x+\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=(x+2)e^x+\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

   şi deci $f''(0)=2+2=4$.

6. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între curba de ecuaţie $y=x\,e^x$ şi dreptele $x=-1$, $x=0$, $y=0$.

   a) $1-\frac{2}{e}$; b) 2; c) 3; d) -1; e) -2; f) e.

   Soluţie. Aria este $\int_{-1}^0|xe^x|\,dx=\int_{-1}^0-(xe^x)dx=e^x(1-x)\,\Big|_{-1}^0=1-\frac{2}{e}$.

7. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_3^{19}\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\;dx$.

   a) $\frac{38}{3}$; b) $\frac{19}{2}$; c) $\frac{39}{2}$; d) $\frac{18}{5}$; e) $\frac{36}{5}$; f) $\frac{38}{5}$.

Soluţie. Din condiţia de existenţă a radicalului $\sqrt{x-3}$, avem $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$. Cum $x \in [3,19]$, această condiţie este satisfăcută. Se observă că

$$\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = \sqrt{(\sqrt{x-3}-3)^2} = |\sqrt{x-3}-3| = \begin{cases} 3-\sqrt{x-3}, & x \in [3,12] \\ \sqrt{x-3}-3, & x \in [12,19]. \end{cases}$$

Atunci

$$I = \int_3^{19} \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ \mathrm{d}x\ = \int_3^{12} (3-\sqrt{x-3})dx + \int_{12}^{19} (\sqrt{x-3}-3)dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $y = \sqrt{x-3}$, deci $x = y^2+3$, $dx = 2ydy$ şi $x = 3 \Rightarrow y = 0$, $x = 12 \Rightarrow y = 3$, $x = 19 \Rightarrow y = 4$. Rezultă

$$I = \int_0^3 (3-y)2ydy + \int_3^4 (y-3)2ydy = \left(3y^2 - \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^3 + \left(\frac{2}{3}y^3 - 3y^2\right)\Bigg|_3^4 = \frac{38}{3}.$$

8. Fie a şi b numere reale astfel încât $-5 < a < 2$ şi $-7 < b < 1$. Atunci valorile posibile ale produsului ab sunt cuprinse în intervalul:

a) $(2,35)$; b) $(-14,7)$; c) $(-12,3)$; d) $(-14,35)$; e) $(-35,2)$; f) $(-14,2)$.

Soluţie. Pentru $a, b > 0$ avem $ab < 2 \cdot 1 = 2$. Pentru $a, b < 0$ avem $0 < -a < 5$ şi $0 < -b < 7$ şi deci $ab < 35$. Pentru $a < 0 < b$ avem $0 < -a < 5$ si $0 < b < 1$ şi deci $-ab < 5 \Leftrightarrow ab > -5$. Dacă $b < 0 < a$ rezultă $0 < -b < 7$ şi $0 < a < 2$. Prin înmulţire avem $-ab < 14$, deci $ab > -14$. Din aceste consideraţii avem $-14 < ab < 35 \Leftrightarrow ab \in (-14, 35)$. Acest rezultat este optim deoarece $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0}(-5+\varepsilon)(-7+\varepsilon) = 35$ şi $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0}(2-\varepsilon)(-7+\varepsilon) = -14$.

9. Se consideră permutările

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{11} \cdot x = \tau$.

a) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; c) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;
d) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; e) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Avem $\sigma^2 = e$ şi deci $\sigma^{11} = \sigma^{10} \cdot \sigma = \sigma$. Ecuaţia devine $\sigma \cdot x = \tau$ şi de aici

$$x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Dacă $2x - y + z = 0$, $x + y - z = 0$ şi $y \neq 0$, să se calculeze valoarea raportului

$$\frac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 3; f) 0.

Soluţie. Din $2x + z = y$ şi $x - z = -y$ rezultă $x = 0$ şi $z = y$, deci $\dfrac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{-2y^2+y^2}{y^2+y^2} = -\dfrac{1}{2}$.

11. Valoarea raportului $\frac{\ln 15}{\lg 15}$ este

a) $\frac{e}{15}$; b) 15; c) 5; d) $\lg e$; e) $\ln 10$; f) 1.

Soluţie. Avem $\lg 15 = \dfrac{\ln 15}{\ln 10}$ şi deci $\dfrac{\ln 15}{\lg 15} = \ln 10$.

12. Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $x^3 + x + \hat{2} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$.

a) $\hat{0}$; b) $\hat{4}$; c) $\hat{5}$; d) $\hat{1}$; e) $\hat{3}$; f) $\hat{2}$.

Soluţie. Prin înlocuiri succesive, se observă că dintre valorile $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, doar $\hat{2}$ şi $\hat{5}$ verifică ecuaţia. Suma căutată este deci $\hat{2} + \hat{5} = \hat{1}$.

13. Robinetul A umple un rezervor gol în două ore, iar robinetul B umple acelaşi rezervor în patru ore. În câte minute vor umple acelaşi rezervor gol robinetele A şi B curgând împreună ?

a) 40 min; b) 80 min; c) 100 min; d) 360 min; e) 180 min; f) 60 min.

Soluţie. Într-o oră primul robinet umple $\frac{1}{2}$ din bazin iar al doilea umple $\frac{1}{4}$ din bazin. Ambele robinete umplu bazinul în $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ ore adică $\frac{4}{3}\cdot 60 = 80\,\text{min}$.

14. Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$?

a) 6; b) 4; c) 5; d) 24; e) nici unul; f) 25.

Soluţie. Termenul general este $T_{k+1} = C_{25}^{k}(\sqrt{2})^{25-k}\cdot(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{k} = C_{25}^{k}2^{\frac{5(15-k)}{6}}$, $k=\overline{0,25}$. Este necesar şi suficient ca $\frac{15-k}{6}=h\in\mathbb{Z}$, deci $k=15-6h$ cu $h\in\mathbb{Z}$. Condiţia $k\in\overline{0,25}$ se rescrie

$$0\le 15-6h\le 25 \Leftrightarrow -\frac{10}{6}\le h\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow h\in\{-1,0,1,2\}\Leftrightarrow k\in\{21,15,9,3\}\subset\overline{0,25}.$$

Aceste valori corespund termenilor $\{T_{21},T_{16},T_{10},T_{4}\}$ şi deci dezvoltarea binomială conţine patru termeni raţionali.

15. Să se determine m real dacă există o singură pereche (x,y) de numere reale astfel încât $y\ge x^2+m$ şi $x\ge y^2+m$.

a) nu există m; b) $m=\frac{1}{4}$; c) $m=0$; d) $m\ge\frac{1}{8}$; e) $m<\frac{1}{8}$; f) $m=1$.

Soluţie. Adunând relaţiile, obţinem

$$x^2+y^2-x-y+2m\le 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le -2m+\frac{1}{2}.$$

Dacă $-2m+\frac{1}{2}<0$ se obţine o contradicţie. Dacă $m=\frac{1}{4}$, atunci $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=0$. Deci $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$. Dacă $m<\frac{1}{4}$ alegem $x=y$, $x^2-x+m\le 0$ deci $x\in\left[\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}\right]$, deci există o infinitate de soluţii cu proprietatea din enunţ. Deci răspunsul este $m=\frac{1}{4}$.

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale a şi b dacă $AB = BA$.

   a) $a = 2,\ b = 0$; b) $a = 1,\ b = 1$; c) $a = -2,\ b = 0$; d) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$; e) $a = 2,\ b = 2$; f) $a \in \mathbb{R},\ b = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

   a) 0; b) $\ln 3$; c) 1; d) 0 şi 1; e) -1; f) nu are soluţii.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

   a) 1; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{2}\ln 2$; e) -1; f) $\ln 2$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} = x$.

   a) 1; b) 0; c) $0,\ 1,\ i$; d) $0,\ 1$; e) $1,\ -1$; f) $0,\ 1,\ -1$.

5. Să se calculeze $C_6^4 + A_5^2$.

   a) 35; b) 102; c) 10; d) 15; e) 20; f) 25.

6. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 - 3x$.

   a) $0,\ -1$; b) $0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$; c) 0; d) $1,\ -1$; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

7. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele $1,\ \ln 2,\ \ln 3,\ \pi$.

   a) $\ln 2,\ 1,\ \ln 3,\ \pi$; b) $1,\ \ln 2,\ \pi,\ \ln 3$; c) $\ln 2,\ \ln 3,\ 1,\ \pi$; d) $1,\ \ln 3,\ \pi,\ \ln 2$; e) $1,\ \ln 2,\ \ln 3,\ \pi$; f) $1,\ \pi,\ \ln 2,\ \ln 3$.

8. Să se determine m real dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + m, & x \le 1 \\ m^2 x + 2, & x > 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

   a) 2; b) nu există; c) 0 şi 1; d) -1; e) 1; f) 0.

9. Să se calculeze $\sqrt{a^2 - b^2}$ pentru $a = 242,5$ şi $b = 46,5$.

   a) 196; b) $\sqrt{46640}$; c) 240,75; d) 283; e) 238; f) 238,25.

10. Să se determine m real dacă ecuaţia $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$ are două soluţii reale şi distincte.

    a) $m \in (-\infty, 3)$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) $m = -3$; d) $m \in (3, \infty)$; e) $m \in (-\infty, -1)$; f) $m \in (-1, 3)$.

11. Fie funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\quad f(x) = x \cdot \ln(x+1)$. Să se calculeze $f(1) + f'(0)$.

    a) 0; b) $\ln 2$; c) 1; d) $1 + \ln 2$; e) ∞; f) $\ln 3$.

12. Să se determine m real dacă $m \cdot \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x}\,dx = 1$.

    a) $\ln 2$; b) 2; c) 4; d) $\ln \frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3 + 1^2} + \frac{2^2}{n^3 + 2^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n^2} \right).$$

    a) nu există; b) 2; c) 1; d) 0; e) ∞; f) $\frac{1}{3}$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

    a) $-\frac{1}{2},\ 1$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{2},\ 1$; f) $-\frac{1}{2},\ 0$.

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}$.

a) $\frac{5}{3}$; b) $-\infty$; c) $\frac{4}{5}$; d) 0; e) $\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.

16. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{x_2+x_3}{x_1}+\dfrac{x_1+x_3}{x_2}+\dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-6x^2+x+2=0$.

a) -3; b) -1; c) -6; d) 3; e) 0; f) 1.

17. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a integralei
$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-a-bx)^2\mathrm{d}x$ pentru a, b reale.

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) 8; f) $\frac{5}{4}$.

18. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\searrow 0}f^{(n)}(x).$$

a) 2; b) 0; c) e; d) 1; e) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}}$; f) nu există.

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale a şi b dacă $AB = BA$.

   a) $a = 2,\ b = 0$; b) $a = 1,\ b = 1$; c) $a = -2,\ b = 0$; d) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$; e) $a = 2,\ b = 2$; f) $a \in \mathbb{R},\ b = 0$.

   Soluţie. Avem $AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b + 4 = 2a + b$, adică $a = 2, b \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuaţia $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

   a) 0; b) $\ln 3$; c) 1; d) 0 şi 1; e) -1; f) nu are soluţii.

   Soluţie. Notăm $3^x = y$ şi avem $y > 0$ si $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y \in \{1, 3\}$. Atunci $y = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, sau $y = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. În concluzie $x \in \{0, 1\}$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$.

   a) 1; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{2}\ln 2$; e) -1; f) $\ln 2$.

   Soluţie. Avem $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} = x$.

   a) 1; b) 0; c) 0, 1, i; d) 0, 1; e) 1, -1; f) 0, 1, -1.

   Soluţie. Prin ridicare la cub obţinem $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$.

5. Să se calculeze $C_6^4 + A_5^2$.

   a) 35; b) 102; c) 10; d) 15; e) 20; f) 25.

   Soluţie. Cum $C_6^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ si $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, rezultă $C_6^4 + A_5^2 = 35$.

6. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 - 3x$.

   a) 0, -1; b) 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; c) 0; d) 1, -1; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

   Soluţie. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Cum semnul lui f' se schimbă în $x_1 = -1, x_2 = 1$ rezultă că abscisele căutate sunt -1 şi 1.

7. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele 1, $\ln 2$, $\ln 3$, π.

   a) $\ln 2$, 1, $\ln 3$, π; b) 1, $\ln 2$, π, $\ln 3$; c) $\ln 2$, $\ln 3$, 1, π; d) 1, $\ln 3$, π, $\ln 2$; e) 1, $\ln 2$, $\ln 3$, π; f) 1, π, $\ln 2$, $\ln 3$.

   Soluţie. Avem $2 < e < 3 < e^\pi$ şi deci logaritmând şirul de inegalităţi $\ln 2 < 1 < \ln 3 < \pi$.

8. Să se determine m real dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + m, & x \leq 1 \\ m^2 x + 2, & x > 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

   a) 2; b) nu există; c) 0 şi 1; d) -1; e) 1; f) 0.

   Soluţie. Funcţia f este continuă pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Continuitatea în $x = 1$ are loc d.n.d. $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 2 + m = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = m^2 + 2 = f(1) \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 + m \Rightarrow m \in \{0, 1\}$.

9. Să se calculeze $\sqrt{a^2 - b^2}$ pentru $a = 242,5$ şi $b = 46,5$.

   a) 196; b) $\sqrt{46640}$; c) 240,75; d) 283; e) 238; f) 238,25.

   Soluţie. Avem $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(242.5 - 46.5)(242.5 + 46.5)} = \sqrt{196 \cdot 289} = \sqrt{14^2 \cdot 17^2} = 238$.

10. Să se determine m real dacă ecuaţia $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$ are două soluţii reale şi distincte.

a) $m \in (-\infty, 3)$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) $m = -3$; d) $m \in (3, \infty)$; e) $m \in (-\infty, -1)$; f) $m \in (-1, 3)$.

Soluţie. Condiţia este $\triangle > 0$ adică

$$(m+3)^2 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow (m+3-2m)(3+m+2m) > 0 \Leftrightarrow m \in (-1, 3).$$

11. Fie funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \ln(x+1)$. Să se calculeze $f(1) + f'(0)$.

a) 0; b) $\ln 2$; c) 1; d) $1 + \ln 2$; e) ∞; f) $\ln 3$.

Soluţie. Cum $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, rezultă $f'(0) + f(1) = \ln 1 + 0 + \ln 2 = \ln 2$.

12. Să se determine m real dacă $m \cdot \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x} dx = 1$.

a) $\ln 2$; b) 2; c) 4; d) $\ln \frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

Soluţie. Produsul din membrul stâng al relaţiei fiind nenul, rezultă în particular $m \neq 0$. De asemenea, varabila $x \in [1, \sqrt{2}]$ din integrala definită este strict pozitivă. Deoarece $e^{\ln x} = x$, folosind schimbarea de variabilă $y = mx^2$ (definită de o bijecţie pentru pentru $x > 0$), rezultă

$$I = m \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2} x dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2} (mx^2)' dx = \frac{1}{2} e^{mx^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(e^{2m} - e^m\right),$$

deci, ţinând cont de faptul că $e^m > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, obţinem

$$\frac{1}{2}(e^{2m} - e^m) = 1 \Leftrightarrow (e^m)^2 - e^m - 2 = 0 \Leftrightarrow e^m \in \{-1, 2\} \cap (0, \infty) = \{2\} \Leftrightarrow e^m = 2 \Leftrightarrow m = \ln 2.$$

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3 + 1^2} + \frac{2^2}{n^3 + 2^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n^2} \right).$$

a) nu există; b) 2; c) 1; d) 0; e) ∞; f) $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Avem $\frac{k^2}{n^3+n^2} \leq \frac{k^2}{n^3+k^2} \leq \frac{k^2}{n^3+1}$ şi deci sumând pentru $k \in \{1, \cdots, n\}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}{n^3+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^2} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}{n^3+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \frac{1}{3},$$

deci conform criteriului cleştelui, obţinem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^2} = \frac{1}{3}$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

a) $-\frac{1}{2}$, 1; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{2}$, 1; f) $-\frac{1}{2}$, 0.

Soluţie. Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = (2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2x+1)(1-x)^2.$$

Deci ecuaţia se rescrie $(x-1)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}$.

a) $\frac{5}{3}$; b) $-\infty$; c) $\frac{4}{5}$; d) 0; e) $\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^2(x+2)}=\dfrac{4}{5}$.

16. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{x_2+x_3}{x_1}+\dfrac{x_1+x_3}{x_2}+\dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-6x^2+x+2=0$.

a) -3; b) -1; c) -6; d) 3; e) 0; f) 1.

Soluţie. Observăm că rădăcinile sunt nenule. Folosim relaţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \\ x_1x_2x_3=-2 \end{cases}$.
Rezultă $x_2+x_3=6-x_1$ şi $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-\frac{1}{2}$. Atunci

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{x_2+x_3}{x_1}+\tfrac{x_1+x_3}{x_2}+\tfrac{x_1+x_2}{x_3}=\tfrac{6-x_1}{x_1}+\tfrac{6-x_2}{x_2}+\tfrac{6-x_3}{x_3}= \\ &= 6\left(\tfrac{1}{x_1}+\tfrac{1}{x_2}+\tfrac{1}{x_3}\right)-3=6\left(-\tfrac{1}{2}\right)-3=-6. \end{aligned}$$

17. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a integralei
$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-a-bx)^2\mathrm{d}x$ pentru $a,\,b$ reale.

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) 8; f) $\frac{5}{4}$.

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_{-1}^{1}(x^4-2bx^3+(b^2-2a)x^2+2abx+a^2)dx=\frac{2}{5}+\frac{2(b^2-2a)}{3}+2a^2= \\ &= 2a^2-\tfrac{4a}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2b^2}{3}=2\left(a-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{2b^2}{3}+\tfrac{8}{45}\geq\tfrac{8}{45}, \end{aligned}$$

şi deci minimul căutat este $\frac{8}{45}$.

18. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\searrow 0}f^{(n)}(x).$$

a) 2; b) 0; c) e; d) 1; e) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}}$; f) nu există.

Soluţie. Dezvoltăm în serie funcţia exponenţiala[1] $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Rezultă

$$f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^k+(-\sqrt{x})^k}{k!}=2\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right),$$

deci $f^{(n)}(x)=2\left(\frac{n!}{(2n)!}+\frac{(n+1)n\cdots 2}{(2n+2)}x+\cdots\right)$. Trecând la limită după x obţinem

$$\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=\frac{2n!}{(2n)!}=\frac{2n!}{(2\cdot 4\cdots 2n)(1\cdot 3\cdots(2n-1))}=\frac{2n!}{2^n n!(2n-1)!!}=\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x))=0$.

[1] Se presupune că elevii cunosc dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale.

1. Fie curba de ecuaţie $y = 2x^3 + 4x$. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta de ecuaţie $y = mx + 4$ este tangentă la curbă.

   a) $m = 10$; b) $m = -1$; c) $m = 8$; d) $m = 2$; e) $m = 12$; f) $m = -6$.

2. Fie N numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $2^x = x^2$. Decideţi dacă:

   a) $N = 0$; b) $N = 3$; c) ecuaţia are numai soluţii întregi; d) $N = 4$; e) $N = 1$; f) $N = 2$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}\ \mathrm{d}t$.

   a) 14; b) ∞; c) 10; d) 20; e) 18; f) 0.

4. Fie $e_1 = (1, -1, 0)$ şi $e_2 = (1, 1, 0)$. Să se precizeze pentru care din vectorii e_3 de mai jos, vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$.

   a) $e_3 = (2, -2, 0)$; b) $e_3 = (-2, 2, 0)$; c) $e_3 = (0, 0, 1)$; d) $e_3 = (5, 5, 0)$;
   e) $e_3 = (0, 0, 0)$; f) $e_3 = (2, 3, 0)$.

5. Soluţiile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 - 3x - 10 = 0$ satisfac condiţiile

   a) $x_1 = x_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$; b) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; c) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;
   d) $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\ \mathbb{R}$; e) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; f) $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$.

6. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ dacă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
   $f(x) = x^3 - 2(m+1)x^2 + \left(m^2 + 2m + 2\right)x - 2m$, intersectează axa Ox în trei puncte distincte.

   a) $m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, \infty\right)$; b) $m \neq 1$;
   c) $m \in \left(-2-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}\right)$;
   d) $m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$;
   e) nu există m; f) $m \neq -2+2\sqrt{2}$.

7. Să se găsească $\mathbf{l} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2+n+3}\right)$.

   a) $\mathbf{l} = -1$; b) nu există; c) $\mathbf{l} = \frac{3}{2}$; d) $\mathbf{l} = \infty$; e) $\mathbf{l} = 0$; f) $\mathbf{l} = 1$.

8. Primitivele $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ sunt

   a) $x + \operatorname{tg} x + \mathbf{C}$; b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \mathbf{C}$; c) $x + \operatorname{ctg} x + \mathbf{C}$; d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \mathbf{C}$; e) $\frac{1}{\cos^2 x} + \mathbf{C}$; f) $\frac{1}{\sin^2 x} + \mathbf{C}$.

9. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x-1) + e^{x^2}$. Să se calculeze $f'(1)$.

   a) 1; b) 0; c) e^2; d) $2\mathrm{e}$; e) e; f) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

10. Să se rezolve inecuaţia $\dfrac{1-x}{x} > 0$.

    a) $(0, 1)$; b) $(-1, 0)$; c) $[-1, 1]$; d) nu are soluţii; e) $[0, 1)$; f) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

11. Pe mulţimea $\mathbb{R}^3$ se defineşte legea de compoziţie $(x_1, y_1, z_1) \star (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 \cdot z_2)$. Găsiţi elementul neutru.

    a) $(1, 0, 1)$; b) $(0, 1, 0)$; c) $(0, 1, 1)$; d) $(1, 1, 0)$; e) $(1, 0, 0)$; f) $(0, 0, 1)$.

12. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$, este continuă dacă

    a) $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$; b) $a = -1$, $b = 2$; c) $a = 1$, $b = 2$; d) $a = 1$, $b > 1$;
    e) $a = b = -1$; f) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$.

13. Să se determine o funcţie polinomială P, de grad cel mult doi, care verifică condiţiile $P(1) = 1$, $\quad P'(1) = 0$, $\quad P''(1) = 2$.

    a) $-x^2 + 2x + 2$; b) $x^2 - 2x + 2$; c) $x^2 + x + 1$; d) $x^2 + x + 2$; e) $-x^2 + 2x$;
    f) $-x^2 - 2x - 2$.

14. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2+x^2\cos x}$.

a) ∞; b) 0; c) 1; d) limita nu există; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

15. Să se rezolve inecuaţia $\ln \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{\ln x} < 2$.

a) $x\in(0,1)$; b) $x>0$; c) nu are soluţii; d) $x\in(0,\mathrm{e})$; e) $x\in(-2,1)$; f) $x>1$.

16. Suma numerelor naturale n ce satisfac inegalitatea $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot C_n^2<8$ este

a) 10; b) 6; c) 7; d) 5; e) 8; f) 9.

17. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$, este inversabilă pentru

a) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$; b) $a\in\{-1,0\}$; c) $a\in\mathbb{R}$; d) $a\neq 0$; e) $a\neq -1$; f) nu există.

18. Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2-4x+1=0$ este

a) 14; b) 12; c) -12; d) 16; e) 10; f) 4.

1. Fie curba de ecuaţie $y = 2x^3 + 4x$. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta de ecuaţie $y = mx + 4$ este tangentă la curbă.

   a) $m = 10$; b) $m = -1$; c) $m = 8$; d) $m = 2$; e) $m = 12$; f) $m = -6$.

   Soluţie. Eliminând y din sistemul liniar $\begin{cases} y = 2x^3 + 4x \\ y = mx + 4 \end{cases}$, rezultă $2x^3 + 4x = mx + 4$. Este necesar şi suficient ca ecuaţia $f(x) \equiv 2x^3 + (4 - m)x - 4 = 0$ sa aibă o radacină multiplă reală. Din relaţiile lui Viéte rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi $x_1 x_2 x_3 = 2$. Folosind condiţia $x_1 = x_2$, obţinem $x_3 = -2x_1$ şi $-2x_1^3 = 2$. Avem deci $x_1 = -1$. Deoarece $f(-1) = 0$, avem $m = 10$.

   Altfel. După obţinerea rădăcinii duble $x_1 = -1$, calculăm $x_3 = -2x_1 = 2$, iar din a doua relaţie Viéte obţinem
   $$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4-m}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{4-m}{2} \Leftrightarrow m = 10.$$

2. Fie N numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $2^x = x^2$. Decideţi dacă:

   a) $N = 0$; b) $N = 3$; c) ecuaţia are numai soluţii întregi; d) $N = 4$; e) $N = 1$; f) $N = 2$.

   Soluţie. Observam ca $x = 0$ nu este solutie deci distingem cazurile $x < 0$ şi $x > 0$.

   1. Considerăm mai intâi $x < 0$. Notăm $y = -x > 0$ şi deci $1 = y^2 2^y$. Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(y) = y^2 \cdot 2^y - 1$ este strict crescătoare ca produs a două funcţii strict crescătoare minus o funcţie constantă şi deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(0) = -1 < 0$ şi $f(1) = 1 > 0$, rezultă f are soluţie unică, $y_1 \in (0, 1)$. Deci ecuaţia dată are o singură soluţie în intervalul $(-\infty, 0), x_1 = -y_1 < 0$.

   2. Pentru $x > 0$, Se observă că ecuaţia admite soluţiile $x_2 = 2$ şi $x_3 = 4$. Verificăm că acestea sunt singurele soluţii strict pozitive. Ecuaţia se rescrie $x \ln 2 = 2 \ln x$. Fie $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$, deci $g'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x}$. Avem $g'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\ln 2}$. Pe de altă parte, avem $\lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, iar $g(2) = 0, g(4) = 0$. Dar $x_0 \in (2, 4)$ este singura radacină a derivatei g', deci, folosind şirul lui Rolle, se deduce că $x_2 = 2$ şi $x_3 = 4$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei $g(x) = 0$ în intervalul $(0, +\infty)$. Concluzionăm că ecuaţia $2^x = x^2$ are 3 rădăcini reale, $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 = 2$ şi $x_3 = 4$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int\limits_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3 + 9}\ dt$.

   a) 14; b) ∞; c) 10; d) 20; e) 18; f) 0.

   Soluţie. Funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = t\sqrt{t^3 + 9}$ admite primitive F. Deci $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{x+3}^{2x+3} f(t)dt = \lim_{x \to 0} \frac{F(2x+3) - F(x+3)}{x}$, deci folosind regula l'Hospital (cazul 0/0), rezultă
   $$\lim_{x \to 0} \frac{2f(2x+3) - f(x+3)}{1} = 2f(3) - f(3) = 3\sqrt{3^3 + 9} = 18.$$

4. Fie $e_1 = (1, -1, 0)$ şi $e_2 = (1, 1, 0)$. Să se precizeze pentru care din vectorii e_3 de mai jos, vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$.

   a) $e_3 = (2, -2, 0)$; b) $e_3 = (-2, 2, 0)$; c) $e_3 = (0, 0, 1)$; d) $e_3 = (5, 5, 0)$;
   e) $e_3 = (0, 0, 0)$; f) $e_3 = (2, 3, 0)$.

   Soluţie. Dacă $e_3 = (a, b, c)$, atunci condiţia $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$ implică $c \neq 0$, deci răspunsul corect este $(0, 0, 1)$.

5. Soluţiile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 - 3x - 10 = 0$ satisfac condiţiile

   a) $x_1 = x_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$; b) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$; c) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;
   d) $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$; e) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$; f) $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$.

Soluţie. Pentru ecuaţia $f(x) = x^3 - 3x - 10 = 0$, întocmim şirul lui Rolle. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Dar

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad f(-1) = -8 < 0, f(1) = -12 < 0,$$

deci $x_1 \in \mathbb{R}$ şi $x_2, x_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (unde numerotarea celor trei radacini este aleatoare).

6. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ dacă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m^2 + 2m + 2)x - 2m$, intersectează axa Ox în trei puncte distincte.

   a) $m \in \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, \infty\right)$; b) $m \neq 1$;
   c) $m \in \left(-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\right)$;
   d) $m \in \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$;
   e) nu există m; f) $m \neq -2 + 2\sqrt{2}$.

   Soluţie. Rezolvăm ecuaţia $f(x) = 0$. Se observa ca $x = m$ este soluţie, deci $f(x) = (x - m)(x^2 - mx - 2x + 2) = (x - m)(x^2 - x(m + 2) + 2)$. Graficul intersectează axa Ox in trei puncte distincte dacă ecuaţia $f(x) = 0$ are 3 rădăcini distincte. Avem $x_1 = m$ (o radacină) iar pentru $x^2 - x(m + 2) + 2 = 0$ impunem condiţiile: $\triangle > 0$ şi $x_1 = m$ să nu fie radacină. Obţinem $\triangle = (m + 2)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 8 \Leftrightarrow |m + 2| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, \infty)$. Pe de altă parte, $x = m$ nu este rădăcina pentru ecuaţia de grad 2 d.n.d. $f(m) \neq x^2 - x(m + 2) + 2 \Leftrightarrow m \neq 1$. Deci soluţia finală este $m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, 1) \cup (1, \infty)$.

7. Să se găsească $\mathbf{l} = \lim_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$.

   a) $\mathbf{l} = -1$; b) nu există; c) $\mathbf{l} = \frac{3}{2}$; d) $\mathbf{l} = \infty$; e) $\mathbf{l} = 0$; f) $\mathbf{l} = 1$.

   Soluţie. Raţionalizând, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2 - (n^2 + n + 3)}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n + 3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n + 1}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n + 3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}\right)} = \frac{3}{2}.$$

8. Primitivele $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ sunt

   a) $x + \operatorname{tg} x + C$; b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; c) $x + \operatorname{ctg} x + C$; d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C$; e) $\frac{1}{\cos^2 x} + C$; f) $\frac{1}{\sin^2 x} + C$.

   Soluţie. Folosind formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem scrie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x - 1) + e^{x^2}$. Să se calculeze $f'(1)$.

   a) 1; b) 0; c) e^2; d) 2e; e) e; f) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

   Soluţie. Avem $f'(x) = -\sin(x - 1) + 2xe^{x^2}$, deci $f'(1) = 2e$.

10. Să se rezolve inecuaţia $\dfrac{1 - x}{x} > 0$.

    a) $(0, 1)$; b) $(-1, 0)$; c) $[-1, 1]$; d) nu are soluţii; e) $[0, 1)$; f) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

    Soluţie. Avem $\frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

11. Pe mulţimea $\mathbb{R}^3$ se defineşte legea de compoziţie $(x_1, y_1, z_1) \star (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 \cdot z_2)$. Găsiţi elementul neutru.

    a) $(1, 0, 1)$; b) $(0, 1, 0)$; c) $(0, 1, 1)$; d) $(1, 1, 0)$; e) $(1, 0, 0)$; f) $(0, 0, 1)$.

    Soluţie. Aratăm că există $(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avem $(e_1, e_2, e_3) \star (x, y, z) = (x, y, z) \star (e_1, e_2, e_3) = (x, y, z)$, adică $e_1 + x = x, e_2 + y = y, e_3 z = z \Rightarrow e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1$, deci elementul neutru este $(0, 0, 1)$.

12. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0\end{cases}$ este continuă, dacă

a) $a=1$, $b\in\mathbb{R}$; b) $a=-1$, $b=2$; c) $a=1$, $b=2$; d) $a=1$, $b>1$;
e) $a=b=-1$; f) $a\in\mathbb{R}$, $b=1$.

Soluţie. Cum f este continuă pe $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ este suficient să punem condiţiile pentru continuitate în 0, adică

$$\lim_{x\searrow 0}(x^2+x+1)=\lim_{x\nearrow 0}(ax+b)=f(0)\Rightarrow\begin{cases} b=1 \\ a\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

13. Să se determine o funcţie polinomială P, de grad cel mult doi, care verifică condiţiile $P(1)=1$, $P'(1)=0$, $P''(1)=2$.

a) $-x^2+2x+2$; b) x^2-2x+2; c) x^2+x+1; d) x^2+x+2; e) $-x^2+2x$;
f) $-x^2-2x-2$.

Soluţie. Avem $f=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Condiţiile din enunţ se rescriu:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=0 \\ 2a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2.\end{cases}$$

14. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2+x^2\cos x}$.

a) ∞; b) 0; c) 1; d) limita nu există; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\dfrac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

15. Să se rezolve inecuaţia $\ln \mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{\ln x}<2$.

a) $x\in(0,1)$; b) $x>0$; c) nu are soluţii; d) $x\in(0,\mathrm{e})$; e) $x\in(-2,1)$; f) $x>1$.

Soluţie. Avem $x>0$. Folosind egalitatea $\ln e^x=x$ inecuaţia se rescrie $x+x^2-2<0$, deci $x\in(-2,1)\cap(0,\infty)=(0,1)$.

16. Suma numerelor naturale n ce satisfac inegalitatea $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot C_n^2<8$ este

a) 10; b) 6; c) 7; d) 5; e) 8; f) 9.

Soluţie. Existenţa fracţiei din enunţ conduce la restricţia $n>0$, iar existenţa combinărilor cere $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Inecuaţia se rescrie

$$\frac{n+1}{n}\frac{(n-1)n}{2}<8\Leftrightarrow n^2-17<0\Leftrightarrow n\in[-\sqrt{17},\sqrt{17}].$$

Deci $n\in[-\sqrt{17},\sqrt{17}]\cap\{2,3,4,5,\dots\}=\{2,3,4\}$. Soluţia căutată este prin urmare $2+3+4=9$.

17. Matricea $A=\left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3\end{smallmatrix}\right)$ cu $a\in\mathbb{R}$, este inversabilă pentru

a) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$; b) $a\in\{-1,0\}$; c) $a\in\mathbb{R}$; d) $a\ne 0$; e) $a\ne -1$; f) nu există.

Soluţie. Determinantul matricei A se obţine (spre exemplu) adunând în prealabil a doua linie a acestuia la celelalte două linii:

$$\det A=\left|\begin{smallmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3\end{smallmatrix}\right|=\left|\begin{smallmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 0 & a+3\end{smallmatrix}\right|=-(a+1)a.$$

Prin urmare condiţia ca A să fie inversabilă este $\det A\ne 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

18. Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2-4x+1=0$ este

a) 14; b) 12; c) -12; d) 16; e) 10; f) 4.

Soluţie. Avem $x_1+x_2=4, x_1x_2=1$ şi deci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=14$.

1. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$.

   a) $L=-1$; b) $L=1$; c) $L=\infty$; d) $L=2$; e) $L=0$; f) nu există.

2. Să se determine suma S a coeficienţilor polinomului $f=\left(8X^3-7\right)^4$.

   a) $S=0$; b) $S=3$; c) $S=1$; d) $S=2$; e) $S=2^{10}$; f) $S=-2$.

3. Să se calculeze $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008}$.

   a) 0,3; b) 0,5; c) 0,1; d) $\frac{1}{3}$; e) –0,1; f) 0.

4. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x>0 \\ 2x+a, & x\le 0\end{cases}$ este continuă dacă

   a) $a=1$; b) $a=2$; c) $a\in R$; d) $a=0$; e) $a=-1$; f) $a=\frac{3}{2}$.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă ecuaţia $|\ln x| = mx$ are trei soluţii reale şi distincte.

   a) $m\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$; b) $m>\frac{1}{e}$; c) $m=\frac{1}{e}$; d) $m<\frac{1}{e}$; e) $m=e$; f) $m>0$.

6. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a=\sqrt{3}-1,\ b=\sqrt{5}-2,\ c=1$.

   a) a,b,c; b) c,a,b; c) c,b,a; d) b,c,a; e) b,a,c; f) a,c,b.

7. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. Atunci $f'(1)$ este

   a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

8. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+my+2z=0 \\ x-y-z=0\end{cases}$ să admită numai soluţia nulă (banală).

   a) $m\neq-1$ şi $m\neq 2$; b) $m=0$; c) $m=2$; d) $m\in\mathbb{R}$; e) nu există; f) $m=-1$.

9. Să se calculeze limita $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$.

   a) $L=\frac{2}{3}$; b) $L=\frac{4}{9}$; c) $L=\infty$; d) nu există; e) $L=-1$; f) $L=0$.

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[3]{x-1}-x=-1$ este

    a) $\{0\}$; b) $\{1,\ 2,\ 3\}$; c) $\varnothing$; d) $\{0,\ 1,\ 2\}$; e) $\{-1,0,1\}$; f) $\{1\}$.

11. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f=6X^4-7X^3+aX^2+3X+2$ să se divide prin polinomul $g=X^2-X-1$.

    a) $a=-2$; b) $a=2$; c) $a=-1$; d) $a=-7$; e) $a=0$; f) $a=1$.

12. Funcţia $f:(0,\ 2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2x}$. Să se calculeze $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f^{(k)}(1)-f^{(k+1)}(1)\right)$.

    a) $S_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right)$; b) $S_n=-\frac{8}{9}+2(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right)$; c) $S_n=1-\frac{1}{3^{n+2}}$; d) $S_n=-\frac{8}{9}+(-1)^n\left(1-\frac{3}{3^{n+2}}\right)$; e) $S_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$;
    f) $S_n=-\frac{8}{9}+(-1)^n(n+1)!\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

13. Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}a&b\\0&2\end{pmatrix}$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=BA$.

    a) $a=b=1$; b) $a\in\mathbb{R},\ b=2$; c) $a=-1,\ b=3$; d) $a=-2,\ b=0$;
    e) nu există; f) $a=2,\ b\in\mathbb{R}$.

14. Să se calculeze $\mathrm{i}+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^5$, $(\mathrm{i}^2=-1)$.

    a) 0; b) 3i; c) -1; d) i; e) $-$i; f) 2i.

15. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x-3)(3x-2) \geq 0 \}$.

a) $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$; b) $A = \mathbb{R}$; c) $A = \varnothing$; d) $A = (-1, 1)$; e) $A = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$;
f) $A = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

16. Numărul $x = C_6^4 + A_5^2 - P_4$ este

a) $x = 0$; b) $x = \frac{11}{2}$; c) $x = 11$; d) $x = 10$; e) $x = 15$; f) $x = 25$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x + \log_2 2x = 3$.

a) $x = 0$; b) $x = -2$; c) nu are soluţii; d) $x = \pm 2$; e) $x = 1$; f) $x = 2$.

18. Să se calculeze $I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

a) $I = \mathrm{e}$; b) $I = -1$; c) $I = 1$; d) $I = 0$; e) $I = 2\mathrm{e}$; f) $I = -\mathrm{e}$.

1. Să se calculeze $L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$.

   a) $L=-1$; b) $L=1$; c) $L=\infty$; d) $L=2$; e) $L=0$; f) nu există.

   Soluţie.

$$L = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$$

2. Să se determine suma S a coeficienţilor polinomului $f=\left(8X^3-7\right)^4$.

   a) $S=0$; b) $S=3$; c) $S=1$; d) $S=2$; e) $S=2^{10}$; f) $S=-2$.

   Soluţie. Suma coeficienţilor polinomului $f=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ este $a_0+\ldots+a_n=f(1)$. În cazul de faţă $f(1)=(8-7)^4=1$.

3. Să se calculeze $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008}$.

   a) 0,3; b) 0,5; c) 0,1; d) $\frac{1}{3}$; e) −0,1; f) 0.

   Soluţie. Avem $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008}=\sqrt{\frac{9}{100}}-\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}=\frac{3}{10}-\frac{2}{10}=\frac{1}{10}=0,1$.

4. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x>0 \\ 2x+a, & x\le 0\end{cases}$ este continuă dacă

   a) $a=1$; b) $a=2$; c) $a\in\mathbf{R}$; d) $a=0$; e) $a=-1$; f) $a=\frac{3}{2}$.

   Soluţie. Restrictiile funcţiei f la intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$ sunt continue deoarece acestea sunt funcţii polinomiale. Pentru punctul $x=0$ avem condiţiile

$$f(0)=\lim_{x\nearrow 0} f(x)=\lim_{x\searrow 0} f(x) \Leftrightarrow a=1,$$

   deci f continua d.n.d. $a=1$.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă ecuaţia $|\ln x| = mx$ are trei soluţii reale şi distincte.

   a) $m\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$; b) $m>\frac{1}{e}$; c) $m=\frac{1}{e}$; d) $m<\frac{1}{e}$; e) $m=e$; f) $m>0$.

   Soluţie. Existenta logaritmului cere condiţia $x\in(0,\infty)$. Ecuaţia se rescrie sub forma $\frac{|\ln x|}{x}=m$, şi are soluţii d.n.d. $m\in \operatorname{Im} g$, unde $g(x)=\frac{|\ln x|}{x}$, $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, deci

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & x\in(0,1] \\ \frac{\ln x}{x}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

   Funcţia g este compunere de funcţii continue, deci continuă. Folosind substituţia $x=e^t$, rezultă

$$\lim_{x\searrow 0} g(x)=\lim_{t\to-\infty}-\frac{t}{e^t}=\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0,$$

   iar $g(1)=0$. Avem $g'_s(1)=-1\neq g'_d(1)=1$ şi

$$g'(x)=\begin{cases} \frac{-\ln x\cdot(1-\ln x)}{x^2}, & x\in(0,1) \\ \frac{\ln x\cdot(1-\ln x)}{x^2}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

   Se observă că $g'(x)=0\Leftrightarrow x=e$ iar $g(e)=\frac{1}{e}$. Avem deci tabelul de variaţie al funcţiei g.

x	0		1		e		∞
$g'(x)$	−	−	$-1\|1$	+	0	−	−
$g(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   Deci ecuaţia are $g(x)=m$ are 3 rădăcini distincte d.n.d. $m\in(0,\frac{1}{e})$.

6. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{5} - 2,\ c = 1$.

a) a, b, c; b) c, a, b; c) c, b, a; d) b, c, a; e) b, a, c; f) a, c, b.

Soluţie. Avem $a = \sqrt{3} - 1, b = \sqrt{5} - 2, c = 1$. Obţinem $a > 1.7 - 1 = 0.7$ şi $a < 1.8 - 1 = 0.8$ iar $b < 2.3 - 2 = 0.3$, deci $b < 0.3 < 0.7 < a < 0.8 < 1 = c$. Prin urmare cele trei numere scrise în ordine crescătoare sunt b, a, c.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$. Atunci $f'(1)$ este

a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ şi deci

$$f'(1) = \frac{3}{3\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

8. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ să admită numai soluţia nulă (banală).

a) $m \neq -1$ şi $m \neq 2$; b) $m = 0$; c) $m = 2$; d) $m \in \mathbb{R}$; e) nu există; f) $m = -1$.

Soluţie. Sistemul este omogen, deci compatibil (admite soluţii). Pentru ca sistemul să aibă soluţie unică, este necesar şi suficient ca determinantul D al matricei coeficienţilor să fie nenul, $D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Adunăm prima coloana la coloana a doua şi a treia, dezvoltăm D după linia a treia şi obţinem condiţia $(m+1)(3-m-1) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

9. Să se calculeze limita $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$.

a) $L = \frac{2}{3}$; b) $L = \frac{4}{9}$; c) $L = \infty$; d) nu există; e) $L = -1$; f) $L = 0$.

Soluţie. Avem

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2\frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[3]{x-1} - x = -1$ este

a) $\{0\}$; b) $\{1,\ 2,\ 3\}$; c) $\varnothing$; d) $\{0,\ 1,\ 2\}$; e) $\{-1, 0, 1\}$; f) $\{1\}$.

Soluţie. Ecuaţia se scrie $\sqrt[3]{x-1} = x - 1$. Prin ridicare la puterea a treia (putere impară), rezultă o ecuaţie echivalentă cu ecuaţia din enunţ

$$x - 1 = (x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)[(x-1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)x = 0,$$

deci $x \in \{0, 1, 2\}$.

11. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = 6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2$ să se dividă prin polinomul $g = X^2 - X - 1$.

a) $a = -2$; b) $a = 2$; c) $a = -1$; d) $a = -7$; e) $a = 0$; f) $a = 1$.

Soluţie. Facând împărtirea, se obtine câtul $6x^2 - x + a - 7$ şi restul $(a+7)(x+1)$. Condiţia de divizibilitate revine la anularea restului, deci rezultă $a = -7$.

12. Funcţia $f : (0,\ 2) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. Să se calculeze
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)\right)$.

a) $S_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; b) $S_n = -\frac{8}{9} + 2(-1)^n\left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; c) $S_n = 1 - \frac{1}{3^{n+2}}$;

d) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n\left(1 - \frac{3}{3^{n+2}}\right)$; e) $S_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$; f) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n(n+1)!\left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

Soluţie. Avem $f(x) = \frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Dar

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}},$$

deci $f^{(k)}(1) = (-1)^k k \left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right)$. Dezvoltând suma şi reducând termenii egali, obţinem

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)) = f^{(1)}(1) - f^{(n+1)}(1) = \\ &= -\tfrac{8}{9} - (-1)^{n+1}(n+1)! \left(1 - \tfrac{1}{3^{n+2}}\right) = -\tfrac{8}{9} + (-1)^n (n+1)! \left(1 - \tfrac{1}{3^{(n+2)}}\right). \end{aligned}$$

13. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB = BA$.

a) $a = b = 1$; b) $a \in \mathbb{R},\ b = 2$; c) $a = -1,\ b = 3$; d) $a = -2,\ b = 0$;
e) nu există; f) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Din $AB = BA$ deducem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deci $b + 4 = 2a + b$ adică $a = 2$ şi $b \in \mathbb{R}$.

14. Să se calculeze $\mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^5$, $(\mathrm{i}^2 = -1)$.

a) 0; b) 3i; c) -1; d) i; e) $-$i; f) 2i.

Soluţie. Avem $i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$.

15. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x-3)(3x-2) \geq 0\}$.

a) $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$; b) $A = \mathbb{R}$; c) $A = \varnothing$; d) $A = (-1, 1)$; e) $A = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$;
f) $A = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Soluţie. Inecuaţia $(2x-3)(3x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \geq 0$ are soluţiile $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

16. Numărul $x = C_6^4 + A_5^2 - P_4$ este

a) $x = 0$; b) $x = \frac{11}{2}$; c) $x = 11$; d) $x = 10$; e) $x = 15$; f) $x = 25$.

Soluţie. Avem $C_6^4 + A_5^2 - P_4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + 5 \cdot 4 - 24 = 15 + 20 - 24 = 11$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x + \log_2 2x = 3$.

a) $x = 0$; b) $x = -2$; c) nu are soluţii; d) $x = \pm 2$; e) $x = 1$; f) $x = 2$.

Soluţie. Obţinem $\log_2 x + \log_2 2x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot 2x = \log_2 2^3$ cu $x > 0$ deci $2x^2 = 2^3$, de unde rezultă $x = 2$.

18. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

a) $I = \mathrm{e}$; b) $I = -1$; c) $I = 1$; d) $I = 0$; e) $I = 2\mathrm{e}$; f) $I = -\mathrm{e}$.

Soluţie. Calculăm $I = \int_0^1 xe^x dx$. Integrând prin părţi $g'(x) = e^x, f(x) = x$, rezultă

$$I = e^x x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Să se calculeze $f'(1)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) 0; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1.

2. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx - 10 = 0$ să admită soluţia $x_1 = \mathrm{i}$. **(4 pct.)**

   a) $m = -10,\ n = 3$; b) $m = 1,\ n = -1$; c) $m = -9,\ n = 3$; d) $m = 0,\ n = 0$; e) $m = -3,\ n = 10$; f) $m = 3,\ n = -10$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + m, & x \le 1 \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}, & x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(4 pct.)**

   a) $m = 3$; b) $m = 1$; c) $m = 4$; d) $m = 0$; e) nu există; f) $m = 3/2$.

4. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{x} < 1$. **(4 pct.)**

   a) [0,1); b) (0,1); c) [0,1]; d) $(-1, 1)$; e) nu are soluţii; f) $[0, \infty)$.

5. Dacă (a, b) este o soluţie a sistemului de ecuaţii $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$, atunci **(4 pct.)**

   a) $a^2 + b^2 = 1$; b) $a^2 + b^2 = 2$; c) $a^2 + b^2 < 0$; d) $a \ne b$; e) $a^2b^2 = 2$; f) $a^2 + b^2 = 3$.

6. Să se calculeze termenul al zecelea al progresiei aritmetice cu primul termen $a_1 = 5$ şi raţia $r = 2$. **(4 pct.)**

   a) 10; b) 25; c) 23; d) 20; e) 30; f) 18.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$. **(4 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\frac{\ln 3}{4}$; c) $\frac{\ln 3}{2}$; d) $3\ln 2$; e) $\ln 2$; f) $\frac{\ln 2}{3}$.

8. Soluţiile ecuaţiei $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ sunt **(4 pct.)**

   a) $x_1 = 3$; b) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$; c) nu există; d) $x_1 = 0, x_2 = 3$; e) $x_1 = 1,\ x_2 = 3$; f) $x_1 = -1,\ x_2 = -3$. ß8Notând $3^x = y$, rezultă $y > 0$ şi înlocuind în relaţie obţinem $y^2 - 4y + 3 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $y = 1$ şi $y = 3$. Din $3^x = 1$, obţinem $x = 0$ şi din $3^x = 3$ rezultă $x = 1$; deci $x \in \{0, 1\}$.

9. Expresia $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, are valoarea **(4 pct.)**

   a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) 3.

10. Fie ecuaţia $x^2 - ax + 4 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Dacă soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică egalitatea $x_1 + x_2 = 5$, atunci **(4 pct.)**

    a) $x_1 = x_2$; b) $a < 0$; c) $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$; d) $a = 0$; e) $a = 5$; f) $a = 4$.

11. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$. **(4 pct.)**

    a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) -1.

12. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + 2ax + by$. Să se determine relaţia dintre a şi b astfel încât legea de compoziţie să fie comutativă. **(4 pct.)**

    a) $a - b = 2$; b) $a = 2b$; c) nu există; d) $a = b$; e) $a = \frac{b}{2}$; f) $a + b = 1$.

13. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{x+1} \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\, dt$. Decideţi: **(6 pct.)**

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem; c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală; e) $f(0) = 0$; f) f este convexă.

14. Să se calculeze limita şirului $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}}$, unde $|x| > 1$. **(6 pct.)**

a) $\frac{x^3}{(x-1)^3}$; b) $\frac{x}{x-1}$; c) $\frac{1}{x}$; d) $\frac{1}{x-1}$; e) $\frac{x^2}{(x-1)^2}$; f) ∞.

15. Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{(x-1)^2 - 1}{x}$. **(6 pct.)**

a) ∞; b) 2; c) 1; d) nu există; e) -2; f) $-\infty$.

16. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^2 + 28x + 85} + \sqrt{4x^2 - 28x + 113}$. **(8 pct.)**

a) $14\sqrt{2}$; b) 20; c) $12\sqrt{3}$; d) 19; e) $9\sqrt{5}$; f) $8\sqrt{6}$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$. **(8 pct.)**

a) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$; b) $x_1 = -5/2$; c) $x_1 = 3$; d) $x_1 = 0,\ x_2 = 4$; e) $x_1 = 0$; f) $x_1 = 1,\ x_2 = 4$.

18. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z + 1$. Să se calculeze $f\left(\frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$. **(8 pct.)**

a) -1; b) i; c) $1 - \mathrm{i}$; d) $1 + \mathrm{i}$; e) $\sqrt{3}$; f) 0.

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Să se calculeze $f'(1)$. **(4 pct.)**

   a) $\dfrac{1}{2}$; b) $-\dfrac{1}{4}$; c) 0; d) $\dfrac{1}{4}$; e) $-\dfrac{1}{2}$; f) 1.

   Soluţie. Avem $f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ şi deci $f'(1)=\frac{1}{2}$.

2. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4+3x^3+mx^2+nx-10=0$ să admită soluţia $x_1=\mathrm{i}$. **(4 pct.)**

   a) $m=-10,\ n=3$; b) $m=1,\ n=-1$; c) $m=-9,\ n=3$; d) $m=0,\ n=0$; e) $m=-3,\ n=10$; f) $m=3,\ n=-10$.

   Soluţie. Înlocuind $x=i$ în ecuaţia $x^4+3x^3+mx^2+nx-10=0$, obţinem $1-3i-m+ni-10=0\Leftrightarrow -(m+9)+i(n-3)=0$, de unde prin identificare deducem $m+9=0$ şi $n-3=0$. Deci $m=-9$ şi $n=3$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+m, & x\le 1\\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}, & x>1\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(4 pct.)**

   a) $m=3$; b) $m=1$; c) $m=4$; d) $m=0$; e) nu există; f) $m=3/2$.

   Soluţie. Pe intervalele $(-\infty,1)$ si $(1,\infty)$ funcţia este continuă, fiind sumă de funcţii elementare. Condiţia de continuitate în $x_0=1$ se scrie $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$.

4. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{x}<1$. **(4 pct.)**

   a) [0,1); b) (0,1); c) [0,1]; d) $(-1,1)$; e) nu are soluţii; f) $[0,\infty)$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă este $x\ge 0$, iar din $\sqrt{x}<1$ rezultă $x<1$. Prin urmare, avem $x\in[0,1)$.

5. Dacă (a,b) este o soluţie a sistemului de ecuaţii $\begin{cases} x+y=2\\ xy=1\end{cases}$, atunci **(4 pct.)**

   a) $a^2+b^2=1$; b) $a^2+b^2=2$; c) $a^2+b^2<0$; d) $a\neq b$; e) $a^2b^2=2$; f) $a^2+b^2=3$.

   Soluţie. Din $a+b=2$ si $ab=1$ deducem $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2=2$.

6. Să se calculeze termenul al zecelea al progresiei aritmetice cu primul termen $a_1=5$ şi raţia $r=2$. **(4 pct.)**

   a) 10; b) 25; c) 23; d) 20; e) 30; f) 18.

   Soluţie. Din relaţia $a_n=a_1+(n-1)r$ rezultă $a_{10}=a_1+9r=5+18=23$.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx$. **(4 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\dfrac{\ln 3}{4}$; c) $\dfrac{\ln 3}{2}$; d) $3\ln 2$; e) $\ln 2$; f) $\dfrac{\ln 2}{3}$.

   Soluţie. Avem $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$.

8. Soluţiile ecuaţiei $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ sunt **(4 pct.)**

   a) $x_1=3$; b) $x_1=0,\ x_2=1$; c) nu există; d) $x_1=0, x_2=3$; e) $x_1=1,\ x_2=3$; f) $x_1=-1,\ x_2=-3$.

   Soluţie. Notând $3^x=y$, rezultă $y>0$ şi înlocuind în relaţie obţinem $y^2-4y+3=0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $y=1$ şi $y=3$. Din $3^x=1$, obţinem $x=0$ şi din $3^x=3$ rezultă $x=1$; deci $x\in\{0,1\}$.

9. Expresia $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, are valoarea **(4 pct.)**

a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) 3.

Soluţie. Aducând la acelaşi numărător relaţia din enunţ obţinem: $E = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$.

10. Fie ecuaţia $x^2 - ax + 4 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Dacă soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică egalitatea $x_1 + x_2 = 5$, atunci **(4 pct.)**

a) $x_1 = x_2$; b) $a < 0$; c) $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$; d) $a = 0$; e) $a = 5$; f) $a = 4$.

Soluţie. Din relaţiile lui Viete $x_1 + x_2 = a$ deducem $a = 5$.

11. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$. **(4 pct.)**

a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) -1.

Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

12. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy + 2ax + by$. Să se determine relaţia dintre a şi b astfel încât legea de compoziţie să fie comutativă. **(4 pct.)**

a) $a - b = 2$; b) $a = 2b$; c) nu există; d) $a = b$; e) $a = \dfrac{b}{2}$; f) $a + b = 1$.

Soluţie. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x * y = y * x \Leftrightarrow xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx \Leftrightarrow (2a - b)(x - y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow a = b/2$.

13. Se consideră funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\, dt$. Decideţi: **(6 pct.)**

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem; c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală; e) $f(0) = 0$; f) f este convexă.

Soluţie. Cum funcţia $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ este continuă, aplicăm teorema de medie pe intervalul $[x, x+1]$ şi avem $f(x) = (x + 1 - x)f'(\theta_x)$ unde $\theta_x \in (x, x + 1)$ şi deci $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{\theta_x\to+\infty} \dfrac{\theta_x^2}{\sqrt{\theta_x^4+\theta_x^2+1}} = 1$. Deci graficul funcţiei f admite asimptota orizontală $y = 1$.

14. Să se calculeze limita şirului $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}}$, unde $|x| > 1$. **(6 pct.)**

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^3}$; b) $\dfrac{x}{x-1}$; c) $\dfrac{1}{x}$; d) $\dfrac{1}{x-1}$; e) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; f) ∞.

Soluţie. Pentru $x \neq 1$ avem $x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-x}{x-1} = S(x)$ Derivând această relaţie de 2 ori, avem

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{((n+2)x^{n+1}-1)(x-1) - x^{n+2} + x}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}.$$

Derivând din nou în ambii membri, obţinem

$$S''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)x^{k-1} = \frac{x^{n+2}(n+1)n - 2(n+2)x^{n+1} + (n+2)(n+1)x^4 - 2}{(x-1)^3}.$$

Facând substituţia $x \to \frac{1}{x}$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^k}{x^n} = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $|x| > 1$, avem

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}} = -\frac{2}{2(\frac{1}{x}-1)^3} = \frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^2-1}{x}$. **(6 pct.)**

a) ∞; b) 2; c) 1; d) nu există; e) -2; f) $-\infty$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$.

16. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4x^2+28x+85}+\sqrt{4x^2-28x+113}$. **(8 pct.)**

a) $14\sqrt{2}$; b) 20; c) $12\sqrt{3}$; d) 19; e) $9\sqrt{5}$; f) $8\sqrt{6}$.

Soluţie. Avem $f'(x) = \dfrac{8x+28}{2\sqrt{4x^2+28x+85}} + \dfrac{8x-28}{2\sqrt{4x^2-28x+113}}$. Deci

$$
\begin{aligned}
& f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x+14}{\sqrt{4x^2+28x+85}} + \frac{4x-14}{\sqrt{4x^2-28x+113}} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (2x+7)\sqrt{(2x-7)^2+64} = -(2x-7)\sqrt{(2x+7)^2+36} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (2x+7)^2(2x-7)^2+64(2x+7)^2 = (2x-7)^2(2x+7)^2+36(2x-7)^2 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 16(2x+7)^2 = 9(2x-7)^2 \Leftrightarrow 4(2x+7)=\pm 3(2x-7) \Leftrightarrow x\in\{-\tfrac{49}{2},-\tfrac{1}{2}\}.
\end{aligned}
$$

Pentru $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\backslash\{-\frac{49}{2}\}$, avem $f'(x)<0$, deci funcţia f fiind strict descrescătoare în $x=-\frac{49}{2}$, această valoare nu convine ca abcisă de punct de minim. De asemenea, pentru $x>-\frac{1}{2}$ avem $f'(x)>0$, deci $x=-\frac{1}{2}$ este punct de minim. În final, obţinem $f(-\frac{1}{2})=14\sqrt{2}$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$. **(8 pct.)**

a) $x_1=0,\ x_2=3$; b) $x_1=-5/2$; c) $x_1=3$; d) $x_1=0,\ x_2=4$; e) $x_1=0$; f) $x_1=1,\ x_2=4$.

Soluţie. Avem $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x\in\{1,4\}$.

18. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2+z+1$. Să se calculeze $f\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$. **(8 pct.)**

a) -1; b) i; c) $1-\mathrm{i}$; d) $1+\mathrm{i}$; e) $\sqrt{3}$; f) 0.

Soluţie. Pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, rezultă $(2z+1)^2=(i\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 4z^2+4z+1=-3 \Leftrightarrow z^2+z+1=0$, deci $f(z)=z^2+z+1=0$.

1. Câte soluţii distincte are ecuaţia $\bar{z} = z^2$, $z \in \mathbb{C}$? **(8 pct.)**

   a) O infinitate; b) 5; c) 3; d) 6; e) 1; f) 4.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} \displaystyle\int_0^x t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t\, dt$. **(8 pct.)**

   a) 0; b) ∞ ; c) $\frac{1}{4}$; d) 1; e) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; f) $\frac{\sin 1}{\mathrm{e}}$.

3. Să se calculeze aria mărginită de dreptele $x = 0$, $x = 1$, axa Ox şi de graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 2$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{1}{2}\ln 2$.

4. Câte soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ are ecuaţia $x^4 - x^3y - 8y^4 = 0$? **(6 pct.)**

   a) Nici una; b) Una; c) Două; d) Patru; e) Trei; f) O infinitate.

5. Să se calculeze $f'(2)$ pentru funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - 2^x - x^2$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) -4; c) $4\ln 2$; d) $4(1 + \ln 2)$; e) $2\ln 2$; f) 0.

6. Se cer cea mai mică şi cea mai mare valoare pentru funcţia $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. **(6 pct.)**

   a) $-5, -2$; b) $-6, -2$; c) 1, 3; d) -6, 3; e) 0, 3; f) -5, 3.

7. Se cere domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + 3x)$.**(4 pct.)**

   a) $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$; b) $(0, \infty)$; c) $(3, \infty)$; d) $(-3, \infty)$; e) $(1, \infty)$; f) (e, ∞) .

8. Câte matrice de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ verifică relaţia $X^2 = \mathrm{I}_2$; $x, y \in \mathbb{R}$? **(4 pct.)**

   a) 4 ; b) 3; c) 2; d) 5; e) 1; f) O infinitate.

9. Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Atunci **(4 pct.)**

   a) $ab = 1$; b) $a = 0$, $b = 0$; c) $a > 1$; d) $a = 0$ sau $b = 0$; e) $a < b$; f) $a^2 + b^2 = 1$.

10. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2$ în punctul de inflexiune este **(4 pct.)**

    a) $y = 4x - 9$; b) $y = -4x$; c) $y = 4x + 13$; d) $y = -4x + 11$; e) $y = -1$; f) $y = -4x + 13$.

11. Să se calculeze $x^2 + y$ dacă $2^x - 3y = 0$, $3^x - 2y = 0$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. **(4 pct.)**

    a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $\frac{11}{6}$; e) 6 ; f) -6 .

12. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3$. **(4 pct.)**

    a) 0, 2, -2 ; b) 0 ; c) 0 i 3 ; d) 2 ; e) 3 ; f) 2, -2.

13. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

    a) 4; b) 0 şi 1; c) 1; d) 0; e) -1; f) Nu are soluţii.

14. Să se calculeze valoarea expresiei $E = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1} + \dfrac{x_1 + x_3}{x_2} + \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$. **(4 pct.)**

    a) 1; b) -3; c) -6; d) -1; e) 3; f) 0.

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $2x + my = 0$, $3x + 2y = 0$ admite numai soluţia nulă. **(4 pct.)**

    a) $m = \frac{3}{4}$; b) $m = \frac{4}{3}$; c) $m \neq \frac{4}{3}$; d) $m \neq 0$; e) $m = -\frac{3}{4}$; f) $m = 3$.

16. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{-x-2} - \sqrt[3]{x+5} < 3$. **(4 pct.)**

a) $[-6, -5]$; b) $(-6, -2)$; c) $x \in (-\infty, -2]$; d) $(-5, -2)$; e) $x \in (-\infty, -6]$; f) $x \in (-6, -2]$.

17. Numerele x, $2x+3$, $x+2$ sunt termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă. Să se determine raţia progresiei. **(4 pct.)**

a) 3 ; b) 2 ; c) $x+3$; d) -1 ; e) 1 ; f) -2 .

18. Se cere limita $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$. **(4 pct.)**

a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) 2; e) 0; f) Nu există.

1. Câte soluţii distincte are ecuaţia $\bar{z} = z^2$, $z \in \mathbb{C}$? **(8 pct.)**

   a) O infinitate; b) 5; c) 3; d) 6; e) 1; f) 4.

   Soluţie. Determinăm numărul de soluţii distincte ale ecuaţiei $\bar{z} = z^2, z \in \mathbb{C}$. Din $\bar{z} = z^2$, obţinem $|\bar{z}| = |z^2| = |z|^2$. Cum $|\bar{z}| = |z|$, avem $|z| = |z|^2$, de unde $|z|(1 - |z|) = 0$. Deci $|z| = 0$ sau $|z| = 1$, de unde $z = 0$ sau $|z| = 1$. Examinăm al doilea caz. Ţinând cont că $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, deci $\bar{z} = \frac{1}{z}$, ecuaţia se rescrie echivalent $z^3 = 1$, deci z este una dintre cele trei rădăcini complexe ale unităţii. Avem $z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$. În final, soluţiile ecuaţiei sunt în număr de patru, $z \in \{0, 1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} \displaystyle\int_0^x t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t\, dt$. **(8 pct.)**

   a) 0; b) ∞ ; c) $\dfrac{1}{4}$; d) 1; e) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; f) $\dfrac{\sin 1}{\mathrm{e}}$.

   Soluţie. Se cere să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin dt$. Se observă că limita este de tipul $0/0$, deci aplicăm regula lui L'Hospital şi obţinem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin t dt}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 e^{-x^2} \sin x}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

3. Să se calculeze aria mărginită de dreptele $x = 0$, $x = 1$, axa Ox şi de graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 2$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{1}{2}\ln 2$.

   Soluţie. Aria este egală cu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

4. Câte soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ are ecuaţia $x^4 - x^3 y - 8y^4 = 0$? **(6 pct.)**

   a) Nici una; b) Una; c) Două; d) Patru; e) Trei; f) O infinitate.

   Soluţie. Determinăm câte soluţii ale ecuaţiei. Dacă $y = 0$, atunci $x = 0$ şi deci $x = y = 0$ este soluţie în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a ecuaţiei. Dacă $y \neq 0$, atunci ecuaţia este echivalentă cu $(\frac{x}{y})^4 - (\frac{x}{y})^3 - 8 = 0$. Notând $t = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, obţinem $t^4 - t^3 - 8 = 0$. Se observă că $t = 2$ este soluţie a ecuaţiei, care se rescrie $(t-2)(t^3+t^2+2t+4) = 0$. Cum $t^3 + t^2 + 2t + 4 = 0$ nu are rădăcini raţionale, rezultă că $t = 2$ este unica soluţie. Deci $\frac{x}{y} = 2$, de unde $x = 2y$. Se observă că $(0, 0)$ satisface această relaţie, deci $\{(2n, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ este mulţimea soluţiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuaţiei date. Prin urmare ecuaţia are o infinitate de soluţii.

5. Să se calculeze $f'(2)$ pentru funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - 2^x - x^2$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) -4; c) $4\ln 2$; d) $4(1 + \ln 2)$; e) $2\ln 2$; f) 0.

   Soluţie. Avem $(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$ şi deci $f'(x) = x^x(1 + \ln x) - 2^x \ln 2 - 2x$. Prin urmare $f'(2) = 4(1 + \ln 2) - 4\ln 2 - 4 = 0$.

6. Se cer cea mai mică şi cea mai mare valoare pentru funcţia $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. **(6 pct.)**

   a) $-5, -2$; b) $-6, -2$; c) $1, 3$; d) $-6, 3$; e) $0, 3$; f) $-5, 3$.

   Soluţie. Funcţia este polinomială de gradul doi, deci graficul acesteia este un arc de parabolă, care conţine vârful $(\frac{-b}{a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (1, -6)$ şi care are drept capete punctele $(0, f(0)) = (0, -5)$ şi $(3, f(3)) = (3, -2)$. Deci cea mai mica valoare a functiei este -6, iar cea mai mare valoare este -2. *Altă soluţie.* Avem $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$, iar tabelul de variaţie este

x	0		1		3
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	4
$f(x)$	-5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2

   deci cea mai mică valoare a funcţiei este -6 şi cea mai mare valoare este -2.

7. Se cere domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + 3x)$.**(4 pct.)**

a) $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$; b) $(0, \infty)$; c) $(3, \infty)$; d) $(-3, \infty)$; e) $(1, \infty)$; f) (e, ∞) .

Soluţie. Condiţia de existenţă a funcţiei este $1 + 3x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei este $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.

8. Câte matrice de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ verifică relaţia $X^2 = \mathrm{I}_2$; $x, y \in \mathbb{R}$? **(4 pct.)**

a) 4 ; b) 3; c) 2; d) 5; e) 1; f) O infinitate.

Soluţie. Relaţia din ipoteză se rescrie

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = 0, \end{cases}$$

deci $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă $x = 0$, atunci $y^2 = 1$, de unde $y = \pm 1$. Dacă $y = 0$, atunci $x^2 = 1$, de unde $x = \pm 1$. Prin urmare matricele căutate sunt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, deci patru matrice verifică relaţia din enunţ.

9. Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Atunci **(4 pct.)**

a) $ab = 1$; b) $a = 0, b = 0$; c) $a > 1$; d) $a = 0$ sau $b = 0$; e) $a < b$; f) $a^2 + b^2 = 1$.

Soluţie. Din $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, rezultă $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a+b})^2$, adică $a + b + 2\sqrt{ab} = a + b$, de unde $ab = 0$. Deci $a = 0$ sau $b = 0$.

10. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2$ în punctul de inflexiune este **(4 pct.)**

a) $y = 4x - 9$; b) $y = -4x$; c) $y = 4x + 13$; d) $y = -4x + 11$; e) $y = -1$; f) $y = -4x + 13$.

Soluţie. Avem $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ si $f''(x) = 2x - 6$. Din $f''(x) = 0$, obţinem $x = 3$ şi punctul de inflexiune $(3, f(3))$, adică $(3, -1)$. Tangenta la grafic în punctul $(3, -1)$ este $y + 1 = f'(3)(x - 3)$. Cum $f'(3) = -4$, tangenta are ecuaţia $y + 1 = -4(x - 3)$, adică $y = -4x + 11$.

11. Să se calculeze $x^2 + y$ dacă $2^x - 3y = 0$, $3^x - 2y = 0$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. **(4 pct.)**

a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $\frac{11}{6}$; e) 6 ; f) -6 .

Soluţie. Din cele două relaţii rezultă, respectiv, $y = \frac{2^x}{3}$ şi $y = \frac{3^x}{2}$. Deci $\frac{2^x}{3} = \frac{3^x}{2} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 3^{x+1} \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^{x+1} = 1 = (\frac{2}{3})^0$, de unde $x = -1$. Atunci $y = \frac{1}{6}$ şi deci $x^2 + y = (-1)^2 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

12. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3$. **(4 pct.)**

a) 0, 2, -2 ; b) 0 ; c) 0 i 3 ; d) 2 ; e) 3 ; f) 2, -2.

Soluţie. Avem $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

de unde se observă că funcţia admite un singur punct de extrem local (minim), de abscisă $x = 3$.

13. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

a) 4; b) 0 şi 1; c) 1; d) 0; e) -1; f) Nu are soluţii.

Soluţie. Rezolvăm ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 0$. Ecuaţia se rescrie

$$3^{x+1} = 3^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0,$$

deci $\sqrt{x} = 1$, adică $x = 1$.

14. Să se calculeze valoarea expresiei $E = \dfrac{x_2+x_3}{x_1} + \dfrac{x_1+x_3}{x_2} + \dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$. **(4 pct.)**

a) 1; b) -3; c) -6; d) -1; e) 3; f) 0.

Soluţie. Scriem relaţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \\ x_1x_2x_3=-2 \end{cases}$. Obţinem

$$\begin{aligned} E &= \frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3} = \frac{6-x_1}{x_1} + \frac{6-x_2}{x_2} + \frac{6-x_3}{x_3} = \\ &= 6\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) - 3 = 6\cdot\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3} - 3 = -6. \end{aligned}$$

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $2x+my=0$, $3x+2y=0$ admite numai soluţia nulă. **(4 pct.)**

a) $m = \frac{3}{4}$; b) $m = \frac{4}{3}$; c) $m \neq \frac{4}{3}$; d) $m \neq 0$; e) $m = -\frac{3}{4}$; f) $m = 3$.

Soluţie. Sistemul are numai soluţia nulă dacă $\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{4}{3}$.

16. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{-x-2} - \sqrt[3]{x+5} < 3$. **(4 pct.)**

a) $[-6,-5]$; b) $(-6,-2)$; c) $x \in (-\infty,-2]$; d) $(-5,-2)$; e) $x \in (-\infty,-6]$; f) $x \in (-6,-2]$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului de ordin par este

$$-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2. \tag{1}$$

Notând $\begin{cases} u = \sqrt{-x-2} \geq 0 \\ v = \sqrt[3]{x+5} \end{cases}$, obţinem relaţiile $\begin{cases} u^2+v^3=3 \\ u-v<3 \end{cases}$. Din prima relaţie rezultă $u = \sqrt{3-v^3}$, deci înlocuind in inegalitate, obţinem $\sqrt{3-v^3} - v < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3-v^3} < v+3$. Distingem două cazuri: i) dacă $v+3<0$, obţinem $0 \leq \sqrt{3-v^3} < v+3 < 0$ contradicţie, deci ecuaţia nu are soluţii; ii) dacă $v+3 \geq 0$ atunci

$$v \geq -3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -32. \tag{2}$$

Ridicând la pătrat ambii membri ai inegalităţii $\sqrt{3-v^3} < v+3$, obţinem

$$3 - v^3 < v^2 + 6v + 9 \Leftrightarrow v^3 + v^2 + 6v + 6 > 0 \Leftrightarrow (v+1)(v^2+6) > 0 \Leftrightarrow v+1 > 0.$$

Această inegalitate se rescrie

$$\sqrt[3]{x+5} > -1 \Leftrightarrow x+5 > -1 \Leftrightarrow x > -6 \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem $x \in (-6,-2]$.

17. Numerele x, $2x+3$, $x+2$ sunt termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă. Să se determine raţia progresiei. **(4 pct.)**

a) 3 ; b) 2 ; c) $x+3$; d) -1 ; e) 1 ; f) -2 .

Soluţie. Condiţia ca numerele să fie termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă, este: $x+(x+2) = 2(2x+3) \Leftrightarrow 2x+2 = 4x+6 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$, deci termenii devin $-2, -1, 0$, iar raţia este 1.

18. Se cere limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$. **(4 pct.)**

a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) 2; e) 0; f) Nu există.

Soluţie. Rationalizând, obţinem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

1. Să se calculeze $i + i^3 + i^5$. **(4 pct.)**

   a) 1; b) $-i$; c) 0; d) i; e) -1; f) $2i$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$. Să se calculeze $I = \int_0^3 f^{-1}(t)\,dt$, unde f^{-1} este inversa funcţiei bijective f. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}(5 - 4\ln 2)$; b) $\frac{3 + 4\ln 2}{2}$; c) $\frac{1}{2}(5 + 4\ln 2)$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{2}(2 + \ln 2)$; f) $\frac{1}{2}(5 - \ln 2)$.

3. Să se determine parametrul real m dacă sistemul $x + y = m$, $x + my = 1$ este compatibil nedeterminat. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 0, 1; c) 1; d) -1; e) $m \in \mathbb{R}$; f) 0.

4. Să se determine abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = x^4 + 8x^3$. **(4 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) -2; d) 1; e) -6; f) 0, -6.

5. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{5}{2}$; b) 2; c) 1; d) ∞; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

6. Să se calculeze aria mărginită de parabola $y = 2x - x^2$ şi axa Ox. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 3; c) $-\frac{4}{3}$; d) -1; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

7. Pentru ce valori ale parametrului real m matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$ admite inversă ? **(4 pct.)**

   a) $m = -2$; b) $m \neq \pm 2$; c) $m = 2$; d) $m \in \{-2, 2\}$; e) $m = 0$; f) $m = 4$.

8. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_6$. **(4 pct.)**

   a) 0; b) 2; c) 4; d) 6; e) 1; f) 3.

9. Se cer asimptotele verticale ale graficului funcţiei reale $f : (0, \infty) \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x - 2}$. **(4 pct.)**

   a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = 0$, $x = 1$; e) Nu există; f) $x = 0$, $x = 2$.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 4^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

    a) 3; b) 2; c) 1; d) 4; e) 0; f) -1.

11. Să se determine punctele critice ale funcţiei $f : \mathrm{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$. **(4 pct.)**

    a) 2, -2; b) -1, 1; c) Nu există; d) 1; e) -1; f) 3.

12. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$. **(4 pct.)**

    a) -2; b) 5; c) -5; d) 6; e) 2; f) 0.

13. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} = 2$. **(6 pct.)**

    a) 3; b) 1; c) 4; d) 2; e) 0; f) $x \neq -1$.

14. Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \frac{(x + 1)^3 - (x - 1)^3}{2x^2 + x + 1}$. **(6 pct.)**

    a) 2; b) ∞; c) 1; d) $-\infty$; e) 3; f) 0.

15. Să se determine $a^2 + b^2$ dacă $a + 2b = 1$ şi $2a + b = 2$. **(6 pct.)**

    a) 3; b) 2; c) 0; d) 4; e) 1; f) -2.

16. Să se calculeze $f'(0)$ pentru $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

   a) 2; b) -1; c) -2; d) 1; e) 4; f) 0.

17. Să se determine valorile parametrului real m dacă polinomul $X^2-(m+3)X+9$ are rădăcini duble. **(8 pct.)**

   a) 0; b) $3, -9$; c) -9; d) 3; e) 1; f) $-3, 9$.

18. Fie F primitiva funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ care se anulează în punctul $x=1$. Să se calculeze $F(2)$. **(8 pct.)**

   a) 0; b) $\dfrac{20}{3}$; c) 8; d) $\dfrac{16}{3}$; e) 2; f) 1.

1. Să se calculeze $i + i^3 + i^5$. **(4 pct.)**

   a) 1; b) $-i$; c) 0; d) i; e) -1; f) $2i$.

   Soluţie. Folosind relaţiile $i^2 = -1$ şi $i^4 = 1$, rezultă $i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^3 f^{-1}(t)\,dt$, unde f^{-1} este inversa funcţiei bijective f. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}(5 - 4\ln 2)$; b) $\frac{3 + 4\ln 2}{2}$; c) $\frac{1}{2}(5 + 4\ln 2)$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{2}(2 + \ln 2)$; f) $\frac{1}{2}(5 - \ln 2)$.

   Soluţie. Dacă $f^{-1}(t) = x$, rezultă $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$, iar $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ şi $f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$, deci efectuând schimbarea de variabilă $x = f^{-1}(t)$, şi apoi integrând prin părţi, integrala se rescrie

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\,|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 \frac{x(x^2+1) + 4x}{x^2 + 1}dx = \\
&= 3 - \int_0^1 xdx - 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = 3 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \frac{5}{2} - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(5 - 4\ln 2).
\end{aligned}
$$

3. Să se determine parametrul real m dacă sistemul $x + y = m$, $x + my = 1$ este compatibil nedeterminat. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 0, 1; c) 1; d) -1; e) $m \in \mathbb{R}$; f) 0.

   Soluţie. Determinantul matricii coeficienţilor este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$. El se anulează pentru $m = 1$, pentru care cele două ecuaţii sunt echivalente, deci sistem compatibil nedeterminat cu un grad de libertate.

4. Să se determine abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow R$, $f(x) = x^4 + 8x^3$. **(4 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) -2; d) 1; e) -6; f) 0, -6.

   Soluţie. Avem $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x + 6)$, iar $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, -6\}$. Dar $f'(x) \le 0, \forall x \le -6$ şi $f'(x) \ge 0, \forall x \ge -6$, deci $x = -6$ este singurul punct de extrem.

5. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{5}{2}$; b) 2; c) 1; d) ∞; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

   Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem succesiv

$$
\lim_{n\to\infty}(n + 2 - \sqrt{n^2+n+3}) = 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 - n^2 - n - 3}{n + \sqrt{n^2+n+3}} = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \sqrt{1 + 1/n + 3/n^2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.
$$

6. Să se calculeze aria mărginită de parabola $y = 2x - x^2$ şi axa Ox. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 3; c) $-\frac{4}{3}$; d) -1; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

   Soluţie. Aria se află între axa Ox şi arcul de parabolă aflat deasupra acestei axe, deci corespunzător valorilor $x \in [0, 2]$. Obţinem aria $A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

7. Pentru ce valori ale parametrului real m matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$ admite inversă ? **(4 pct.)**

   a) $m = -2$; b) $m \ne \pm 2$; c) $m = 2$; d) $m \in \{-2, 2\}$; e) $m = 0$; f) $m = 4$.

   Soluţie. Matricea trebuie să aibă determinantul nenul, deci $\det A \ne 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 2$.

8. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_6$. **(4 pct.)**

a) 0; b) 2; c) 4; d) 6; e) 1; f) 3.

Soluţie. Verificând pe rând valorile din $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, se observă că $\hat{2}x = \hat{0}$ are doar soluţiile $\hat{0}$ şi $\hat{3}$, deci numărul de soluţii este 2.

9. Se cer asimptotele verticale ale graficului funcţiei reale $f : (0, \infty) \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$. **(4 pct.)**

a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = 0$, $x = 1$; e) Nu există; f) $x = 0$, $x = 2$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 2} \frac{\ln x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 2} \frac{\ln x}{x-2} = -\infty$, deci $x = 0$ si $x = 2$ sunt asimptotele verticale ale funcţiei f.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 4^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

a) 3; b) 2; c) 1; d) 4; e) 0; f) -1.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 0$. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 2^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

11. Să se determine punctele critice ale funcţiei $f : R^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. **(4 pct.)**

a) 2, -2; b) -1, 1; c) Nu există; d) 1; e) -1; f) 3.

Soluţie. Calculăm derivata funcţiei f; obţinem $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\}$.

12. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1 x_2$. **(4 pct.)**

a) -2; b) 5; c) -5; d) 6; e) 2; f) 0.

Soluţie. Din relaţiile Viétè avem $S = x_1 + x_2 = 3$, $P = x_1 x_2 = 2$, deci $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = S + P = 3 + 2 = 5$.

13. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 2$. **(6 pct.)**

a) 3; b) 1; c) 4; d) 2; e) 0; f) $x \neq -1$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq -1$. Notăm $\sqrt{x+1} = t \geq 0$ şi ecuaţia se rescrie $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \geq 0$, deci $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

14. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2x^2 + x + 1}$. **(6 pct.)**

a) 2; b) ∞; c) 1; d) $-\infty$; e) 3; f) 0.

Soluţie. Obţinem $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 2}{2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6 + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{6}{2} = 3.$

15. Să se determine $a^2 + b^2$ dacă $a + 2b = 1$ şi $2a + b = 2$. **(6 pct.)**

a) 3; b) 2; c) 0; d) 4; e) 1; f) -2.

Soluţie. Rezolvând sistemul liniar $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$, obţinem $a = 1, b = 0$, deci $a^2 + b^2 = 1$.

16. Să se calculeze $f'(0)$ pentru $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. **(8 pct.)**

a) 2; b) -1; c) -2; d) 1; e) 4; f) 0.

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, deci $f'(0) = 1$.

17. Să se determine valorile parametrului real m dacă polinomul $X^2 - (m+3)X + 9$ are rădăcini duble. **(8 pct.)**

a) 0; b) 3, -9; c) -9; d) 3; e) 1; f) -3, 9.

Soluţie. Punem condiţia ca discriminantul ecuaţiei de gradul doi să se anuleze. Obţinem

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m + 3 \in \{\pm 6\} \Leftrightarrow m \in \{3, -9\}.$$

18. Fie F primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ care se anulează în punctul $x = 1$. Să se calculeze $F(2)$. **(8 pct.)**

a) 0; b) $\dfrac{20}{3}$; c) 8; d) $\dfrac{16}{3}$; e) 2; f) 1.

Soluţie. Integrăm funcţia f; obţinem $F(x) = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$; Condiţia $F(1) = 0$ se rescrie $\frac{4}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$, deci $F(2) = \frac{8}{3} + 4 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.

1. Să se determine abscisele punctelor de inflexiune ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. (**4 pct.**)
   a) $\{-1\}$; b) $\{-1, 1\}$; c) $\{0\}$; d) nu există; e) $\{0, 1\}$; f) $\{1\}$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$. Dacă A este imaginea funcţiei f, iar F este primitiva lui f care se anulează în $x = 0$, atunci: (**4 pct.**)
   a) $A = [-\pi, \pi)$, $F(1) = \pi + \ln 2$; b) $A = [-\pi, 2\pi)$, $F(1) = \pi - \ln\sqrt{2}$; c) $A = [0, \pi]$, $F(1) = \pi + \ln 4$; d) $A = [0, \pi)$, $F(1) = \pi - \ln 2$; e) $A = (-\pi, \pi]$, $F(1) = \pi + \ln\sqrt{2}$; f) $A = [0, 2\pi)$, $F(1) = \pi - 2\ln 2$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$. Să se determine primitiva funcţiei f care se anulează în $x = 0$. (**4 pct.**)
   a) $\dfrac{x}{x^2 + 1}$; b) $\dfrac{1}{x^3 + x}$; c) $2 \operatorname{arctg} x$; d) $2 \arcsin x$; e) x^2; f) $\ln(x^2 + 1)$.

4. Fie legea de compoziţie definită pe $\mathbb{R}$ prin $x * y = x(1 - y) + y(1 - x)$. Să se determine elemetul neutru. (**4 pct.**)
   a) 2; b) $-2e$; c) 0; d) 1; e) nu există; f) -1.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$. Să se calculeze $f(i)$. (**4 pct.**)
   a) $1 + i$; b) 0; c) i; d) $1 - i$; e) $-i$; f) 1.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $B = \dfrac{1}{2}(3I_2 - A)$, unde I_2 este matricea unitate de ordinul al doilea. (**4 pct.**)
   a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \min\left\{\ln|x|, e^{x+1} - 1\right\}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Dacă n este numărul punctelor de maxim local ale lui f şi k numărul asimptotelor graficului lui f, atunci: (**4 pct.**)
   a) $n + k = 2$; b) $k - n = 2$; c) $n + k = 4$; d) toate celelalte afirmaţii sunt false; e) $n + k = 3$; f) $k - n = 1$.

8. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2} = 9^x$. (**4 pct.**)
   a) $\{2\}$; b) $\{1\}$; c) $\{0\}$; d) $\emptyset$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{0, 2\}$.

9. Să se rezolve inecuaţia $\dfrac{x + 1}{2} \leq \dfrac{2x}{3}$. (**4 pct.**)
   a) $\emptyset$; b) $\mathbb{R}$; c) $(-\infty, 3]$; d) $(-\infty, 3)$; e) $[3, \infty)$; f) $(3, \infty)$.

10. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real λ pentru care sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases}$ este compatibil determinat. (**4 pct.**)
    a) $(-\infty, 1)$; b) $(1, \infty)$; c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; d) $\{1\}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\emptyset$.

11. Fie şirul $a_n = \sum_{k=3}^{n} \dfrac{k}{2^{k-3}}$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} a_n$. (**4 pct.**)
    a) 9; b) 10; c) $8\sqrt{2}$; d) $\dfrac{15}{2}$; e) 7; f) 8.

12. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2$. (**4 pct.**)
    a) $\left\{1, \dfrac{1}{2}\right\}$; b) $\{1, -1\}$; c) $\{3\}$; d) $\{1, 2\}$; e) $\emptyset$; f) $\{1, 3\}$.

13. Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^4-1}$. (**6 pct.**)

a) ∞; b) $\frac{1}{4}$; c) 1; d) 0; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

14. Să se determine numărul real m pentru care polinomul $f = X^2 - 4X + m$ are rădăcină dublă. (**6 pct.**)

a) -4; b) 0; c) 2; d) 1; e) -2; f) 4.

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ mxe^{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. (**6 pct.**)

a) e^{-1}; b) 4; c) 2; d) 1; e) e; f) nu există.

16. Să se calculeze $\int_0^1 (x^3 + x^2)dx$. (**6 pct.**)

a) $\frac{5}{6}$; b) 5; c) $\frac{7}{12}$; d) 2; e) 6; f) $\frac{1}{5}$.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(0)$. (**8 pct.**)

a) nu există; b) 0; c) 2; d) 3; e) 1; f) e.

18. Să se rezolve ecuaţia $x^2 - 5x + 4 = 0$. (**8 pct.**)

a) $\{1\}$; b) $\{-1, -4\}$; c) $\{4, 5\}$; d) $\emptyset$; e) $\{0\}$; f) $\{1, 4\}$.

1. Să se determine abscisele punctelor de inflexiune ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. (**4 pct.**)
   a) $\{-1\}$; b) $\{-1, 1\}$; c) $\{0\}$; d) nu există; e) $\{0, 1\}$; f) $\{1\}$.

   Soluţie. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, deci $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$. Dacă A este imaginea funcţiei f, iar F este primitiva lui f care se anulează în $x = 0$, atunci: (**4 pct.**)
   a) $A = [-\pi, \pi)$, $F(1) = \pi + \ln 2$; b) $A = [-\pi, 2\pi)$, $F(1) = \pi - \ln\sqrt{2}$; c) $A = [0, \pi]$, $F(1) = \pi + \ln 4$; d) $A = [0, \pi)$, $F(1) = \pi - \ln 2$; e) $A = (-\pi, \pi]$, $F(1) = \pi + \ln\sqrt{2}$; f) $A = [0, 2\pi)$, $F(1) = \pi - 2\ln 2$.

   Soluţie. Pentru a afla $A =$Im f, observăm că

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)|x|} + \frac{2}{1+x^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{1+x^2}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Deci pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia f este constantă, $f(x) = f(-1) = 0$, $\forall x < 0$, iar pe intervalul $(0, \infty)$, f este strict crescătoare. De asemenea, $f(0) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pi + \pi = 2\pi$, deci Im $f = [0, 2\pi)$.

Se observă că se cere $F(1)$, deci vom studia forma primitivelor lui f pentru $x \in (0, +\infty)$. În acest caz integrând prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx = \int \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} dx + 2\int \operatorname{arctg} x dx = \\ &= x \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - \underbrace{\int x \left(\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' dx}_{I} + 2x \operatorname{arctg} x - \underbrace{\int 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx}_{\ln(x^2+1)}, \end{aligned}$$

unde

$$I = \int x \left(\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' dx = \int x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)|x|} = \int \frac{2x}{1+x^2} = \ln(x^2+1),$$

deci

$$F(x) = x \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\ln(x^2+1) + 2x \operatorname{arctg} x + C, \ \forall x > 0.$$

Însă F este continuă pe $\mathbb{R}$, deci în $x = 0$ avem $F(0) = \lim\limits_{x\searrow 0} F(x) = C$, iar condiţia din enunţ conduce la egalitatea $C = 0$. Deci primitiva căutată are pentru $x > 0$ forma

$$F(x) = x \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\ln(x^2+1) + 2x \operatorname{arctg} x, \ \forall x > 0,$$

şi prin urmare $F(1) = \dfrac{\pi}{2} - 2\ln 2 + \dfrac{2\pi}{4} = \pi - 2\ln 2$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$. Să se determine primitiva funcţiei f care se anulează în $x = 0$. (**4 pct.**)
   a) $\dfrac{x}{x^2+1}$; b) $\dfrac{1}{x^3+x}$; c) $2 \operatorname{arctg} x$; d) $2 \arcsin x$; e) x^2; f) $\ln(x^2+1)$.

   Soluţie. $F(x) = \displaystyle\int \frac{2}{x^2+1} dx = 2 \operatorname{arctg} x + C$; $F(0) = C = 0$, deci $F(x) = 2 \operatorname{arctg} x$.

4. Fie legea de compoziţie definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \star y = x(1-y) + y(1-x)$. Să se determine elemetul neutru. (**4 pct.**)

a) 2; b) $-2e$; c) 0; d) 1; e) nu există; f) -1.

Soluţie. Se verifică uşor că legea este comutativă. Atunci

$$x * e = x \Leftrightarrow x\,(1-e) + e\,(1-x) = x \Leftrightarrow e\,(1-2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $e = 0$.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$. Să se calculeze $f(i)$. (**4 pct.**)

a) $1+i$; b) 0; c) i; d) $1-i$; e) $-i$; f) 1.

Soluţie. $f(i) = 1 + i - 1 - i + 1$.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $B = \frac{1}{2}(3I_2 - A)$, unde I_2 este matricea unitate de ordinul al doilea. (**4 pct.**)

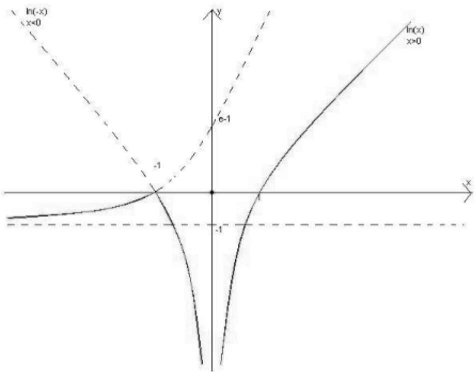
a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Obţtinem succesiv $B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \min\left\{\ln|x|, e^{x+1} - 1\right\}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Dacă n este numărul punctelor de maxim local ale lui f şi k numărul asimptotelor graficului lui f, atunci: (**4 pct.**)

a) $n + k = 2$; b) $k - n = 2$; c) $n + k = 4$; d) toate celelalte afirmaţii sunt false; e) $n + k = 3$; f) $k - n = 1$.

Soluţie. Studiind graficele funcţiilor $\ln|x|$ şi $e^{x+1} - 1$, obţinem $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 1, & x \leq -1 \\ \ln(-x), & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$



Funcţia f admite asimptota orizontală $y = -1$ la $-\infty$ asimptotă verticală bilaterală $x = 0$, deci $k = 2$. Pe de altă parte, punctele $(-1, 0)$ şi $(0, 0)$ sunt maxime locale, deci $n = 2$; rezultă $n + k = 2 + 2 = 4$.

8. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2} = 9^x$. (**4 pct.**)

a) $\{2\}$; b) $\{1\}$; c) $\{0\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{0, 2\}$.

Soluţie. $3^{x^2} = 9^x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$.

9. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x+1}{2} \leq \frac{2x}{3}$. (**4 pct.**)

a) $\varnothing$; b) $\mathbb{R}$; c) $(-\infty, 3]$; d) $(-\infty, 3)$; e) $[3, \infty)$; f) $(3, \infty)$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie $\frac{3x + 3 - 4x}{6} \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 3$. Rezultą $x \in [3, \infty)$.

10. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real λ pentru care sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ x+\lambda y=2 \end{cases}$ este compatibil determinat. (**4 pct.**)

a) $(-\infty,1)$; b) $(1,\infty)$; c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; d) $\{1\}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\varnothing$.

Soluţie. Condiţia $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$ se rescrie $\lambda \neq 1$, deci $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

11. Fie şirul $a_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{2^{k-3}}$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} a_n$. (**4 pct.**)

a) 9; b) 10; c) $8\sqrt{2}$; d) $\frac{15}{2}$; e) 7; f) 8.

Soluţie. Avem $a_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{2^{k-3}} = 4\sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4S'\left(\frac{1}{2}\right)$, unde $S(x) = \sum_{k=3}^{n} x^k = x^3\frac{x^{n-2}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}-x^3}{x-1}$. Obţinem

$$S'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n-2x^3+3x^2}{(x-1)^2} \;\Rightarrow\; S'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}+\frac{1}{2}\right).$$

Prin urmare $S'\left(\frac{1}{2}\right) = 2-\frac{n+2}{2^{n-1}}$, deci $a_n = 4S'\left(\frac{1}{2}\right) = 8-\frac{n+2}{2^{n-3}}$ şi deci $\lim a_n = 8$.

12. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2$. (**4 pct.**)

a) $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$; b) $\{1,-1\}$; c) $\{3\}$; d) $\{1,2\}$; e) $\varnothing$; f) $\{1,3\}$.

Soluţie. Calculăm determinantul, $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^2-3x+3 = 2.$

Ecuaţia se rescrie $2x^2-3x+1=0$, deci $x \in \{1,\frac{1}{2}\}$.

13. Să se calculeze $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^4-1}$. (**6 pct.**)

a) ∞; b) $\frac{1}{4}$; c) 1; d) 0; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Simplificând fracţia prin x^2-1, limita se rescrie $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$.

14. Să se determine numărul real m pentru care polinomul $f = X^2-4X+m$ are rădăcină dublă. (**6 pct.**)

a) -4; b) 0; c) 2; d) 1; e) -2; f) 4.

Soluţie. Anularea discriminantului ecuaţiei de gradul doi asociate $f=0$ conduce la $\Delta \equiv 16-4m = 0 \Leftrightarrow m=4$.

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ mxe^{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. (**6 pct.**)

a) e^{-1}; b) 4; c) 2; d) 1; e) e; f) nu există.

Soluţie. $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x^3+x = f(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} mxe^{x-1} \Leftrightarrow m=2$.

16. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + x^2)dx$. (**6 pct.**)

a) $\frac{5}{6}$; b) 5; c) $\frac{7}{12}$; d) 2; e) 6; f) $\frac{1}{5}$.

Soluţie. $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(0)$. (**8 pct.**)

a) nu există; b) 0; c) 2; d) 3; e) 1; f) e.

Soluţie. $f'(x) = xe^x + e^x$, deci $f'(0) = 1$.

18. Să se rezolve ecuaţia $x^2 - 5x + 4 = 0$. (**8 pct.**)

a) $\{1\}$; b) $\{-1, -4\}$; c) $\{4, 5\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0\}$; f) $\{1, 4\}$.

Soluţie. $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}\right\} = \{1, 4\}$.

1. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 2; b) 4; c) 0; d) 5; e) -2; f) -6.

2. Soluţia ecuaţiei $2^{x+1} = 16$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 0; c) -1; d) 2; e) -2; f) 3.

3. Să se rezolve inecuaţia $x + 2 < 4 - x$. **(5 pct.)**

   a) $x \in (-\infty, 1)$; b) $x \in (-1, 1)$; c) $x \in (1, \infty)$; d) $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$; e) $\emptyset$; f) $x \in (0, \infty)$.

4. Să se determine valoarea parametrului real m pentru care $x = 2$ este soluţie a ecuaţiei $x^3 + mx^2 - 2 = 0$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{2}$; e) 1; f) $\frac{3}{4}$.

5. Să se calculeze $(1 + \mathrm{i})^2$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) $2\mathrm{i}$; c) $4\mathrm{i}$; d) $-2 + \mathrm{i}$; e) 0; f) i.

6. Fie ecuaţia $x^2 - mx + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia are două soluţii reale şi distincte. **(5 pct.)**

   a) $\mathbb{R}$; b) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; c) $(0, \infty)$; d) $(-\infty, 0)$; e) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; f) $\emptyset$.

7. Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{x - 1} = -1$ este: **(5 pct.)**

   a) -3; b) Ecuaţia nu are soluţii; c) 0; d) 1; e) -1; f) 3.

8. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x}$. Să se calculeze $f'(2)$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 0; f) 2.

9. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(x) = \begin{cases} x + 2m, & x \leq 0 \\ m^2 x + 4, & x > 0 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(5 pct.)**

   a) $m = -3$; b) $m = 2$; c) $m = 0$; d) $m = 1$; e) $m \in \mathbb{R}$; f) $m = -2$.

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 5x + 4 = 0$ este: **(5 pct.)**

    a) $\{-1,\ 4\}$; b) $\{-1,\ 1\}$; c) $\{0,\ 3\}$; d) $\{1,\ 4\}$; e) $\emptyset$; f) $\{0,\ -3\}$.

11. Valoarea integralei $\int\limits_0^1 \left(6x^2 + 2x\right) dx$ este: **(5 pct.)**

    a) -2; b) 0; c) 3; d) $\frac{1}{3}$; e) 4; f) $\frac{1}{2}$.

12. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$ astfel încât $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. **(5 pct.)**

    a) $x^2 - 1$; b) $x^2 + 1$; c) $x^2 - 3x$; d) $x^2 + 4x + 5$; e) $x^2 - 2x + 1$; f) $x^2 + x + 1$.

13. Să se calculeze $\sqrt{\pi}$ cu o zecimală exactă. **(5 pct.)**

    a) $1,6$; b) $1,9$; c) $2,2$; d) $1,5$; e) $2,1$; f) $1,7$.

14. Fie şirul cu termenul general $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k C_n^k$, $n \geq 1$. Să se calculeze a_{2009}. **(5 pct.)**

    a) $2007 \cdot 2^{2009}$; b) $2009! + 1$; c) $2008!$; d) $2009 \cdot 2^{2008}$; e) $2008 \cdot 2^{2009}$; f) $\frac{1}{2009}$.

15. Să se calculeze aria mulţimii plane mărginite de graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, axa Ox şi dreptele verticale $x = 1$, $x = \mathrm{e}$. **(5 pct.)**

    a) 1; b) $\mathrm{e} + 2$; c) e; d) $\frac{\mathrm{e}-1}{4}$; e) 0; f) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

16. Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. Asimptotele funcţiei f sunt: **(5 pct.)**

a) $x = 1$, $y = x$; b) $x = 0$, $y = -1$; c) $y = x + 1$; d) $x = -1$, $y = 2x + 3$; e) $x = 1$, $y = 1$, $y = -1$; f) $x = 1$, $y = 1$.

17. Ştiind că polinomul $aX^4 + bX^3 + cX^2 + (a-1)X - 1$ are rădăcina triplă 1, să se calculeze $a + b + c$. **(5 pct.)**

a) 0; b) -2; c) 1; d) -1; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

18. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$. Să se determine elementul neutru. **(5 pct.)**

a) 7; b) -3; c) 1; d) 3; e) Nu există; f) -1.

1. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 2; b) 4; c) 0; d) 5; e) -2; f) -6.

   Soluţie. Dezvoltând după linia a doua a determinantului, obţinem: $-2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(2+1) = -6$.

2. Soluţia ecuaţiei $2^{x+1} = 16$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 0; c) -1; d) 2; e) -2; f) 3.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 2^4$, deci $x+1=4 \Leftrightarrow x=3$.

3. Să se rezolve inecuaţia $x+2<4-x$. **(5 pct.)**

   a) $x\in(-\infty,1)$; b) $x\in(-1,1)$; c) $x\in(1,\infty)$; d) $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$; e) $\varnothing$; f) $x\in(0,\infty)$.

   Soluţie. Regrupând termenii, avem $2x<2 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$.

4. Să se determine valoarea parametrului real m pentru care $x=2$ este soluţie a ecuaţiei $x^3+mx^2-2=0$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{2}$; e) 1; f) $\frac{3}{4}$.

   Soluţie. Înlocuind soluţia $x=2$ în ecuaţie, obţinem: $8+4m-2=0 \Leftrightarrow 4m=-6 \Leftrightarrow m=-3/2$.

5. Să se calculeze $(1+\mathrm{i})^2$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) 2i; c) 4i; d) $-2+\mathrm{i}$; e) 0; f) i.

   Soluţie. Ridicând la pătrat şi folosind proprietatea $i^2=-1$, obţinem $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$.

6. Fie ecuaţia $x^2-mx+1=0$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia are două soluţii reale şi distincte. **(5 pct.)**

   a) $\mathbb{R}$; b) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; c) $(0,\infty)$; d) $(-\infty,0)$; e) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$; f) $\varnothing$.

   Soluţie. Condiţia $\Delta>0$ se rescrie $(-m)^2-4\cdot1>0 \Leftrightarrow m^2-4>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

7. Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{x-1}=-1$ este: **(5 pct.)**

   a) -3; b) Ecuaţia nu are soluţii; c) 0; d) 1; e) -1; f) 3.

   Soluţie. Ridicând la puterea a treia, rezultă $(x-1)=(-1)^3 \Leftrightarrow x-1=-1 \Leftrightarrow x=0$.

8. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x}$. Să se calculeze $f'(2)$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 0; f) 2.

   Soluţie. Derivând, avem $f'(x) = (\frac{x-1}{x})' = (1-\frac{1}{x})' = -(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$, deci $f'(2)=\frac{1}{4}$.

9. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(x)=\begin{cases} x+2m, & x\le 0 \\ m^2x+4, & x>0 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(5 pct.)**

   a) $m=-3$; b) $m=2$; c) $m=0$; d) $m=1$; e) $m\in\mathbb{R}$; f) $m=-2$.

   Soluţie. Avem $f_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+2m)=2m$, $f(0)=x+2m|_{x=0}=2m$, $f_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}(m^2x+4)=4$. Funcţia f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f_s(0)=f(0)=f_d(0)$, deci $2m=4 \Leftrightarrow m=2$. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, fiind compunere de funcţii polinomiale continue, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m=2$.

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2-5x+4=0$ este: **(5 pct.)**

    a) $\{-1,\ 4\}$; b) $\{-1,\ 1\}$; c) $\{0,\ 3\}$; d) $\{1,\ 4\}$; e) $\varnothing$; f) $\{0,\ -3\}$.

    Soluţie. Rădăcinile ecuaţiei de gradul doi sunt $x_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot4}}{2} = \dfrac{4\pm3}{2} \in \{1,4\}$.

11. Valoarea integralei $\int\limits_0^1 (6x^2+2x)\,dx$ este: **(5 pct.)**

a) -2; b) 0; c) 3; d) $\frac{1}{3}$; e) 4; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Integrăm, $\int_0^1 (6x^2+2x)dx = \left(6\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(2x^3+x^2\right)\big|_0^1 = (2+1)-(0+0) = 3.$

12. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$ astfel încât $f(0)=1$, $f(1)=0$. **(5 pct.)**

a) x^2-1; b) x^2+1; c) x^2-3x; d) x^2+4x+5; e) x^2-2x+1; f) x^2+x+1.

Soluţie. Impunând cele două condiţii, rezultă:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2+a\cdot 0+b=1 \\ 1^2+a\cdot 1+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-2x+1.$$

13. Să se calculeze $\sqrt{\pi}$ cu o zecimală exactă. **(5 pct.)**

a) $1,6$; b) $1,9$; c) $2,2$; d) $1,5$; e) $2,1$; f) $1,7$.

Soluţie. Pentru a avea o zecimală exactă în evaluarea lui $\sqrt{\pi}$ trebuie sa aproximăm π cu două zecimale exacte, deci $\pi\simeq 3.14$. Dar $\sqrt{3.14}=\frac{\sqrt{314}}{10}$, iar $\underbrace{289}_{17^2}<314<\underbrace{324}_{18^2}$ şi deci $\frac{\sqrt{17^2}}{10}<\sqrt{3.14}<\frac{\sqrt{18^2}}{10}\Leftrightarrow 1.7<\sqrt{3.14}<1.8$. Rezultă $\sqrt{\pi}\simeq 1.7$.

14. Fie şirul cu termenul general $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$, $n\geq 1$. Să se calculeze a_{2009}. **(5 pct.)**

a) $2007\cdot 2^{2009}$; b) $2009!+1$; c) $2008!$; d) $2009\cdot 2^{2008}$; e) $2008\cdot 2^{2009}$; f) $\frac{1}{2009}$.

Soluţie. Se observă că avem $kC_n^k = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}$. Deci

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k=\sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n(C_{n-1}^0+...+C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}$$

şi prin urmare $a_{2009}=2009\cdot 2^{2008}$.

15. Să se calculeze aria mulţimii plane mărginite de graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$, axa Ox şi dreptele verticale $x=1$, $x=\mathrm{e}$. **(5 pct.)**

a) 1; b) $\mathrm{e}+2$; c) e; d) $\frac{\mathrm{e}-1}{4}$; e) 0; f) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Soluţie. Integrând prin părţi integrala definită care produce aria, obţinem

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \\ &= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

16. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. Asimptotele funcţiei f sunt: **(5 pct.)**

a) $x=1$, $y=x$; b) $x=0$, $y=-1$; c) $y=x+1$; d) $x=-1$, $y=2x+3$; e) $x=1$, $y=1$, $y=-1$; f) $x=1$, $y=1$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = 2\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ şi $\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = 2\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, funcţia f admite asimptota verticală bilaterială $x=1$. De asemenea,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})}=-1,$$

deci funcţia f admite asimpotele orizontale $y=1$ pentru $x\to\infty$ şi $y=-1$ pentru $x\to\infty$ şi deci nu are asimpote oblice pentru $x\to\pm\infty$. În final, asimptotele funcţiei f sunt: $x=1$ (asimptotă verticală bilaterală), $y=1$ şi $y=-1$ (asimptote orizontale).

17. Ştiind că polinomul $aX^4 + bX^3 + cX^2 + (a-1)X - 1$ are rădăcina triplă 1, să se calculeze $a + b + c$. **(5 pct.)**

a) 0; b) -2; c) 1; d) -1; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

Soluţie. Avem $\begin{cases} P = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a-1)x - 1 \\ P' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + a - 1 \\ P'' = 12ax^2 + 6bx + 2c. \end{cases}$

Polinomul P are rădăcina triplă 1 d.n.d. $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Avem deci:

$$\begin{cases} a+b+c+(a-1)-1=0 \\ 4a+3b+2c+a-1=0 \\ 12a+6b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c=2 \\ 5a+3b+2c=1 \\ 6a+3b+c=0. \end{cases}$$

Scăzând primele două ecuaţii înmulţite respectiv cu 2 şi 1 din ultima ecuaţie, obţinem:

$$\begin{cases} 2a+b+c=2 \\ a+b=-3 \\ 4a+2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ 2a+b=-1 \\ 2a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0.$$

18. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$. Să se determine elementul neutru. **(5 pct.)**

a) 7; b) -3; c) 1; d) 3; e) Nu există; f) -1.

Soluţie. Se observă că legea este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Deci $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru bilateral d.n.d. $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Z}$, ceea ce se revine la

$$xe - 2x - 2e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x(e-3) - 2(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-2)(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z},$$

deci $e = 3 \in \mathbb{Z}$ este element neutru.

1. Să se rezolve inecuaţia $3^{4-x} \leq 3^x$. **(5 pct.)**
   a) $\emptyset$; b) $x \in [2, \infty)$; c) $x \in \{-1, 1\}$; d) $x \in [0, 2]$; e) $x \in [-1, 1]$; f) $x \in \mathbb{R}$.

2. Coordonatele punctului de extrem al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ sunt: **(5 pct.)**
   a) $(\mathrm{e}, -\mathrm{e})$; b) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$; c) $(1, -1)$; d) $(1, 0)$; e) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; f) $(1, 1)$.

3. Fie $a_1, ..., a_{10}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 10$ şi raţia $r = -3$. Câţi termeni pozitivi are progresia? **(5 pct.)**
   a) 10; b) 2; c) 5; d) 6; e) 4; f) 3.

4. Valoarea expresiei $E = \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7$ este: **(5 pct.)**
   a) i; b) $2\mathrm{i}$; c) 1; d) $\mathrm{i} + 1$; e) $\mathrm{i} - 1$; f) 0.

5. Valoarea integralei $\int_0^1 (3x^2 - 2x)dx$ este: **(5 pct.)**
   a) 0; b) -1; c) 1; d) 2; e) -2; f) $\frac{1}{2}$.

6. Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$ este: **(5 pct.)**
   a) $x^2\mathrm{e}^x$; b) e^x; c) $(x + 2)\mathrm{e}^x$; d) $(x + 1)\mathrm{e}^x$; e) 0; f) $x\mathrm{e}^x$.

7. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ este continuă pentru: **(5 pct.)**
   a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $m = -1$; d) $m = -2$; e) $m = \frac{1}{2}$; f) $m = 0$.

8. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 0$. **(5 pct.)**
   a) $a \in [-1, 1]$; b) $a = 3$; c) $a = -1$; d) $a = 2$; e) $a = -2$; f) $a = 0$.

9. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. **(5 pct.)**
   a) 3; b) 2; c) -1; d) 1; e) ∞; f) 0.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $B = A^2 - A$ este: **(5 pct.)**
    a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$; c) 0_2; d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

11. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 - mx + 4 = 0$ să admită soluţie dublă. **(5 pct.)**
    a) $m \in [-4, 4]$; b) $m = 0$; c) $m \in \mathbb{R}$; d) $m \in \{-4, 4\}$; e) $m \in \{-2, 2\}$; f) $m = 5$.

12. Câte perechi distincte $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de numere întregi verifică inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 5$? **(5 pct.)**
    a) 19; b) 11; c) 8; d) 20; e) 21; f) 13.

13. Să se calculeze $x - \frac{1}{x}$ pentru $x = \frac{1}{2}$. **(5 pct.)**
    a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$; e) -1; f) $\frac{3}{2}$.

14. Să se scrie în ordine crescătoare numerele 2, π, $\sqrt{3}$. **(5 pct.)**
    a) π, 2, $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}$, π, 2; c) 2, $\sqrt{3}$, π; d) $\sqrt{3}$, 2, π; e) π, $\sqrt{3}$, 2; f) 2, π, $\sqrt{3}$.

15. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x + 6}$. **(5 pct.)**
    a) $[3, \infty)$; b) $[0, \infty)$; c) $(-\infty, -4]$; d) $[-3, 3]$; e) $\mathbb{R}$; f) $[-3, \infty)$.

16. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$. **(5 pct.)**
    a) 0; b) 10; c) 12; d) 8; e) 16; f) 9.

17. Valoarea limitei $l = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$ este: **(5 pct.)**

a) -1; b) limita nu există; c) 1; d) $-\infty$; e) ∞; f) 0.

18. Valoarea integralei $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$ satisface inegalitatea: **(5 pct.)**

a) $I < \frac{1}{\mathrm{e}}$; b) $I < 0,1$; c) $I < \frac{\pi}{10}$; d) $I < 0$; e) $I < \frac{1}{3}$; f) $I < \frac{\pi}{4}$.

1. Să se rezolve inecuaţia $3^{4-x} \leq 3^x$. **(5 pct.)**

   a) $\emptyset$; b) $x \in [2, \infty)$; c) $x \in \{-1, 1\}$; d) $x \in [0, 2]$; e) $x \in [-1, 1]$; f) $x \in \mathbb{R}$.

   Soluţie. Baza este supraunitară, deci ecuaţia devine $4 - x \leq x \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$.

2. Coordonatele punctului de extrem al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ sunt: **(5 pct.)**

   a) $(\mathrm{e}, -\mathrm{e})$; b) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$; c) $(1, -1)$; d) $(1, 0)$; e) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; f) $(1, 1)$.

   Soluţie. Avem $f'(x) = \ln x + 1$ şi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Deci $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, iar punctul de extrem este $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$.

3. Fie $a_1, ..., a_{10}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 10$ şi raţia $r = -3$. Câţi termeni pozitivi are progresia? **(5 pct.)**

   a) 10; b) 2; c) 5; d) 6; e) 4; f) 3.

   Soluţie. Se observă că $a_1 = 10 > a_2 = 7 > a_3 = 4 > a_4 = 1 > a_5 = -2 \geq a_k, k \geq 5$. Deci numărul de termeni pozitivi este 4.

4. Valoarea expresiei $E = \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7$ este: **(5 pct.)**

   a) i; b) 2i; c) 1; d) $\mathrm{i} + 1$; e) $\mathrm{i} - 1$; f) 0.

   Soluţie. $i^{4k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, deci $E = i + i^3 = i(1 + i^2) = i \cdot 0 = 0$.

5. Valoarea integralei $\int\limits_0^1 (3x^2 - 2x)dx$ este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) 1; d) 2; e) -2; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Integrala devine $\left.(x^3 - x^2)\right|_0^1 = (1 - 1) - (0 - 0) = 0$.

6. Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$ este: **(5 pct.)**

   a) $x^2\mathrm{e}^x$; b) e^x; c) $(x + 2)\mathrm{e}^x$; d) $(x + 1)\mathrm{e}^x$; e) 0; f) $x\mathrm{e}^x$.

   Soluţie. $f'(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$.

7. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ este continuă pentru: **(5 pct.)**

   a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $m = -1$; d) $m = -2$; e) $m = \frac{1}{2}$; f) $m = 0$.

   Soluţie. $f_s(1) = m + 1, f_d(1) = f(1) = 0$, iar f este continuă pe $\mathbb{R}$ d.n.d. f este continuă şi în punctul $x = 0$, deci dacă $f_s(1) = f_d(1) = f(1)$. Rezultă că f este continuă pentru $m = -1$.

8. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 0$. **(5 pct.)**

   a) $a \in [-1, 1]$; b) $a = 3$; c) $a = -1$; d) $a = 2$; e) $a = -2$; f) $a = 0$.

   Soluţie. Avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

9. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) 2; c) -1; d) 1; e) ∞; f) 0.

   Soluţie. Simplificând fracţia prin $x - 1$, obţinem $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $B = A^2 - A$ este: **(5 pct.)**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$; c) 0_2; d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Prin calcul direct, se obţine

$$B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

11. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 - mx + 4 = 0$ să admită soluţie dublă. **(5 pct.)**

a) $m \in [-4, 4]$; b) $m = 0$; c) $m \in \mathbb{R}$; d) $m \in \{-4, 4\}$; e) $m \in \{-2, 2\}$; f) $m = 5$.

Soluţie. Condiţia $\Delta = 0$ se rescrie $(-m)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (m-4)(m+4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{\pm 4\}$.

12. Câte perechi distincte $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de numere întregi verifică inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 5$? **(5 pct.)**

a) 19; b) 11; c) 8; d) 20; e) 21; f) 13.

Soluţie. Perechile trebuie sa satisfacă relaţiile $0 \leq x^2 \leq 5$, $0 \leq y^2 \leq 5 \Leftrightarrow x, y \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Dar x şi y sunt întregi, deci $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Prin verificare directă se constată că din cele 25 de variante posibile, cele care *nu* satisfac inegalitatea sunt cele în care $\{x, y\} \subset \{\pm 2\}$, adică perechile $(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \mp 2)$; prin urmare, rămân $25 - 4 = 21$ variante valide, mai exact

$$\{(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (0,2), (0,-2), (2,0), (-2,0),$$
$$(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2), (2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}.$$

13. Să se calculeze $x - \frac{1}{x}$ pentru $x = \frac{1}{2}$. **(5 pct.)**

a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$; e) -1; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

14. Să se scrie în ordine crescătoare numerele $2,\ \pi,\ \sqrt{3}$. **(5 pct.)**

a) $\pi,\ 2,\ \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3},\ \pi,\ 2$; c) $2,\ \sqrt{3},\ \pi$; d) $\sqrt{3},\ 2,\ \pi$; e) $\pi,\ \sqrt{3},\ 2$; f) $2,\ \pi,\ \sqrt{3}$.

Soluţie. Deoarece, cu eroare de maxim $\varepsilon = 0.1$ avem $\sqrt{3} \simeq 1.7 < 1.8, \pi \simeq 3.14 > 3.1$, rezultă $\sqrt{3} < 1.8 < 2 < 3.1 < \pi$, deci răspunsul este $\sqrt{3}, 2, \pi$.

15. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x + 6}$. **(5 pct.)**

a) $[3, \infty)$; b) $[0, \infty)$; c) $(-\infty, -4]$; d) $[-3, 3]$; e) $\mathbb{R}$; f) $[-3, \infty)$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Leftrightarrow x \,\epsilon\, [-3, \infty)$.

16. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$. **(5 pct.)**

a) 0; b) 10; c) 12; d) 8; e) 16; f) 9.

Soluţie. Rezolvând ecuaţia, obţinem $\{x_1, x_2\} \in \{(1,3), (3,1)\}$, deci $x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 3^3 = 10$.

Altfel. Folosind relaţiile Viète, avem $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 3$, deci

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4^2 - 2 \cdot 3 = 16 - 6 = 10.$$

17. Valoarea limitei $l = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$ este: **(5 pct.)**

a) -1; b) limita nu există; c) 1; d) $-\infty$; e) ∞; f) 0.

Soluţie. Raţionalizând diferenţa şi împărţind apoi simultan numărătorul şi numitorul prin n, obţinem

$$l = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{2} = 1.$$

18. Valoarea integralei $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$ satisface inegalitatea: **(5 pct.)**

a) $I < \frac{1}{\mathrm{e}}$; b) $I < 0,1$; c) $I < \frac{\pi}{10}$; d) $I < 0$; e) $I < \frac{1}{3}$; f) $I < \frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Se ştie că $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...,$ deci pentru $x \geq 0$ avem $e^x \geq 1 + x$. Înlocuim x cu $x^2 \geq 0$ şi obţinem $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. Deoarece funcţiile din inegalitate sunt continue şi nu coincid pe intervalul $[0, 1]$, obţinem inegalitatea strictă

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad I < \frac{\pi}{4}.$$

Altfel. Pentru $x \in [0, 1]$, avem $x^2 \leq x \Leftrightarrow -x^2 \geq -x \Rightarrow \mathrm{e}^{-x^2} \geq \mathrm{e}^{-x}$ şi

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx = -\mathrm{e}^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}},$$

deci integrând inegalitatea de mai sus şi folosind aproximări, rezultă

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \geq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \geq \frac{2.7-1}{2.8} = \frac{1.7}{2.8} = \frac{17}{28} \geq \frac{4}{7},$$

deci $I \geq \dfrac{4}{7}$. Se observă că au loc inegalităţile

$$\frac{1}{\mathrm{e}} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 4 \cdot \mathrm{e}) \Rightarrow I > \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad 0.1 < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 40) \Rightarrow I > 0.1$$
$$\frac{\pi}{10} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7\pi < 40) \Rightarrow I > \frac{\pi}{10}, \quad \frac{1}{3} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 12) \Rightarrow I > \frac{1}{3}, \quad 0 < \frac{4}{7} \Rightarrow I > 0,$$

deci (conform convenţiei că din şase variante una singură poate fi adevărată), singura variantă validă rămâne $I < \frac{\pi}{4}$.

1. Să se calculeze $\int_0^1 (x^2 + x)dx$. **(5 pct.)**
   a) $\frac{1}{6}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3; f) $\frac{5}{6}$.

2. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x^2 - 9} = 4$ este: **(5 pct.)**
   a) 9; b) -1; c) 5; d) 1; e) 0; f) 4.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calculaţi A^3. **(5 pct.)**
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{2x+1}{x+2} = 1$. **(5 pct.)**
   a) $x = 1$; b) $x = -2$; c) $x = -\frac{1}{2}$; d) $x = 2$; e) $x = \sqrt{2}$; f) $x = \sqrt[3]{2}$.

5. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 3^{4x}$. **(5 pct.)**
   a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) -1; e) $\frac{2}{3}$; f) 0.

6. Câte numere naturale x verifică inegalitatea $x < \dfrac{9}{x}$? **(5 pct.)**
   a) şase; b) două; c) patru; d) niciunul; e) unul; f) cinci.

7. Dacă x şi y verifică sistemul $\begin{cases} 2x + y = 2 - 3m \\ x - y = 1 - 3m \end{cases}$, atunci $x + 2y$ este egal cu: **(5 pct.)**
   a) 1; b) 0; c) $2m + 1$; d) $m - 1$; e) m; f) 2.

8. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1}$. **(5 pct.)**
   a) nu există limita; b) 2; c) 1; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) $+\infty$.

9. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2x^2 - 5x + 2 = 0$ este: **(5 pct.)**
   a) $-\frac{5}{2}$; b) 0; c) 1; d) $\frac{5}{2}$; e) 4; f) -1.

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - e^x$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**
    a) 3; b) 1; c) e^2; d) $\frac{1}{e}$; e) 0; f) 2.

11. Să se calculeze $(1 + i)^2$. **(5 pct.)**
    a) $-i$; b) $2i$; c) 3; d) 0; e) i; f) 1.

12. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x}{2} - 1 < \frac{x}{3} + 2$. **(5 pct.)**
    a) $x \geq 20$; b) $x > 20$; c) $x \leq 18$; d) $x > 24$; e) $x = 21$; f) $x < 18$.

13. Suma rădăcinilor polinomului $X^3 - 3X^2 + 2X$ este: **(5 pct.)**
    a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) 2; e) 0; f) 1.

14. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ este: **(5 pct.)**
    a) 4; b) 1; c) 2; d) 3; e) 5; f) 0.

15. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x = -1$. **(5 pct.)**
    a) $x = -\frac{1}{2}$; b) $x = e$; c) $x = 1$; d) $x = 0$; e) $x = 2$; f) $x = \frac{1}{2}$.

16. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+1}{3^k}$. **(5 pct.)**
    a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{9}{4}$; c) 2; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{7}{3}$; f) 3.

17. Fie $f:(-\infty,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x-1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y=x+2$ să fie asimptotă la graficul funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $m=\sqrt{2}$; b) $m=-\sqrt{2}$; c) $m=-1$; d) $m=1$; e) $m=2$; f) $m=0$.

18. Să se calculeze raţia r a unei progresii aritmetice cu $a_1=1$ şi $a_4=7$. **(5 pct.)**

a) $r=6$; b) $r=7$; c) $r=\frac{1}{2}$; d) $r=\sqrt{2}$; e) $r=-2$; f) $r=2$.

1. Să se calculeze $\int_0^1 (x^2+x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{6}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3; f) $\frac{5}{6}$.

   Soluţie. Prin calcul direct, aplicând formula Leibnitz-Newton, obţinem
$$\int_0^1 (x^2+x)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

2. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x^2-9}=4$ este: **(5 pct.)**

   a) 9; b) -1; c) 5; d) 1; e) 0; f) 4.

   Soluţie. Radicalul există pentru $x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei, obţinem $x^2-9=16 \Leftrightarrow x^2=25$, deci $x\in\{\pm 5\}\subset(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$. Prin urmare rădăcinile ecuaţiei sunt -5 şi 5, iar suma lor este 0.

3. Fie $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ Calculaţi A^3. **(5 pct.)**

   a) $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$; f) $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$.

   Soluţie. Se observă că $A^2=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=I_2$, deci $A^3=A^2\cdot A=I_2\cdot A=A$, deci $A^3=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{2x+1}{x+2}=1$. **(5 pct.)**

   a) $x=1$; b) $x=-2$; c) $x=-\frac{1}{2}$; d) $x=2$; e) $x=\sqrt{2}$; f) $x=\sqrt[3]{2}$.

   Soluţie. Se impune condiţia $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$. Ecuaţia devine $2x+1=x+2$, de unde $x=1$.

5. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1}=3^{4x}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) -1; e) $\frac{2}{3}$; f) 0.

   Soluţie. Din $3^{x+1}=3^{4x}$ rezultă $x+1=4x$, de unde $x=\frac{1}{3}$.

6. Câte numere naturale x verifică inegalitatea $x<\dfrac{9}{x}$? **(5 pct.)**

   a) şase; b) două; c) patru; d) niciunul; e) unul; f) cinci.

   Soluţie. Avem $x<\frac{9}{x}\Leftrightarrow\frac{x^2-9}{x}<0$. Dar $x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow x>0$, deci inecuaţia este echivalentă cu $x^2-9<0$ şi deci $x\in(-3,3)$. Cum $x\in\mathbb{N}^*$, rezultă $x\in(-3,3)\cap\mathbb{N}^*=\{1,2\}$.

7. Dacă x şi y verifică sistemul $\begin{cases}2x+y=2-3m\\ x-y=1-3m\end{cases}$, atunci $x+2y$ este egal cu: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 0; c) $2m+1$; d) $m-1$; e) m; f) 2.

   Soluţie. Scăzând membru cu membru ecuaţia a doua din prima ecuaţie, obţinem $x+2y=1$.

8. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}$. **(5 pct.)**

   a) nu există limita; b) 2; c) 1; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) $+\infty$.

   Soluţie. Dând factor forţat x^2 la numitor, simplificând şi apoi trecând la limită, obţinem
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

9. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2x^2-5x+2=0$ este: **(5 pct.)**

   a) $-\frac{5}{2}$; b) 0; c) 1; d) $\frac{5}{2}$; e) 4; f) -1.

   Soluţie. Notăm cu $x_{1,2}$ soluţiile ecuaţiei. Din relaţiile Viète, obţinem $x_1x_2=\frac{2}{2}=1$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+3x-e^x$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**

a) 3; b) 1; c) e^2; d) $\frac{1}{e}$; e) 0; f) 2.

Soluţie. Avem $f'(x)=3x^2+4x+3-e^x$, deci $f'(0)=3-1=2$.

11. Să se calculeze $(1+i)^2$. **(5 pct.)**

a) $-i$; b) $2i$; c) 3; d) 0; e) i; f) 1.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $(1+i)^2=1+2i-1=2i$.

12. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}+2$. **(5 pct.)**

a) $x\geq 20$; b) $x>20$; c) $x\leq 18$; d) $x>24$; e) $x=21$; f) $x<18$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie

$$\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}+2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{x}{3}<1+2 \Leftrightarrow \frac{x}{6}<3 \Leftrightarrow x<18.$$

13. Suma rădăcinilor polinomului X^3-3X^2+2X este: **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) 2; e) 0; f) 1.

Soluţie. Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului, din relaţiile Viète rezultă $x_1+x_2+x_3=-\frac{-3}{1}=3$.

14. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ este: **(5 pct.)**

a) 4; b) 1; c) 2; d) 3; e) 5; f) 0.

Soluţie. Calculăm derivata, $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, iar ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x\in\{\pm1\}$. Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$1-x^2$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ (minim)	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ (maxim)	$\searrow$	$\searrow$

Prin urmare funcţia are *două* puncte de extrem: punctul de minim local $(-1,-\frac{1}{2})$ şi punctul de maxim local $(1,\frac{1}{2})$.

15. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x=-1$. **(5 pct.)**

a) $x=-\frac{1}{2}$; b) $x=e$; c) $x=1$; d) $x=0$; e) $x=2$; f) $x=\frac{1}{2}$.

Soluţie. Condiţia de existenţa a logaritmului este $x>0$. Avem $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

16. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{3^k}$. **(5 pct.)**

a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{9}{4}$; c) 2; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{7}{3}$; f) 3.

Soluţie. Calculăm în prealabil suma $S=1+2q+3q^2+\ldots+(n+1)q^n$. Avem

$$\begin{aligned} qS-S &= (n+1)q^{n+1}-(1+q+q^2+\ldots+q^n)\\ &= (n+1)q^{n+1}-\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\\ &= \frac{(n+1)q^{n+2}-(n+2)q^{n+1}+1}{q-1}, \end{aligned}$$

de unde rezultă $S=\dfrac{(n+1)q^{n+2}-(n+2)q^{n+1}+1}{(q-1)^2}$. Pentru $q=\dfrac{1}{3}$, obţinem

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{(n+1)(\frac{1}{3})^{n+2}-(n+2)(\frac{1}{3})^{n+1}+1}{(\frac{1}{3}-1)^2},$$

de unde $a_n=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}-\dfrac{n+2}{3^{n+1}}+1\right)$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{9}{4}$.

17. Fie $f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y = x + 2$ să fie asimptotă la graficul funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $m = \sqrt{2}$; b) $m = -\sqrt{2}$; c) $m = -1$; d) $m = 1$; e) $m = 2$; f) $m = 0$.

Soluţie. Dacă dreapta $y = ax + b$ este asimptotă la graficul funcţiei f pentru $x \to \infty$, atunci $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ şi $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$. Prin urmare $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + mx + 1}{x(x-1)} = 1$ şi

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + mx + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(m+1)x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(m + 1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{m + 1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = m + 1.$$

Rezultă $m + 1 = 2$, de unde $m = 1$.

18. Să se calculeze raţia r a unei progresii aritmetice cu $a_1 = 1$ şi $a_4 = 7$. **(5 pct.)**

a) $r = 6$; b) $r = 7$; c) $r = \frac{1}{2}$; d) $r = \sqrt{2}$; e) $r = -2$; f) $r = 2$.

Soluţie. Deoarece $a_4 = a_1 + 3r$, avem $7 = 1 + 3r$, de unde $r = 2$.

1. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **(5 pct.)**

   a) $D = 5$; b) $D = 4$; c) $D = 2$; d) $D = 1$; e) $D = 0$; f) $D = 3$.

2. Să se calculeze $I = \int_0^1 (x^2 - x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $I = \frac{2}{3}$; b) $I = 0$; c) $I = \dfrac{1}{2}$; d) $I = -\dfrac{1}{6}$; e) $I = 2$; f) $I = 6$.

3. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $|z| = 0$; b) $|z| = \sqrt{5}$; c) $|z| = \sqrt{7}$; d) $|z| = 6$; e) $|z| = 4$; f) $|z| = -1$.

4. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - x - 2 = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 3; e) 0; f) 5.

5. Calculaţi $E = C_5^2 + C_5^3$. **(5 pct.)**

   a) $E = 20$; b) $E = 10$; c) $E = 2$; d) $E = -5$; e) $E = 0$; f) $E = 15$.

6. Soluţia reală a ecuaţiei $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x$ este: **(5 pct.)**

   a) -1; b) 0; c) $-\frac{1}{11}$; d) 1; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{3}{5}$.

7. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$ **(5 pct.)**

   a) $x = 4, y = 0$; b) $x = 5, y = -4$; c) $x = 0, y = -1$;
   d) $x = -1, y = 3$; e) $x = -2, y = -2$; f) $x = 2, y = 1$.

8. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $C = AB - BA$. **(5 pct.)**

   a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; e) $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; f) $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Ecuaţia $\sqrt{x - 1} + x = 7$ are soluţia: **(5 pct.)**

   a) $x = 0$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 2$; f) $x = 6$.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 8$. **(5 pct.)**

    a) $x = 2$; b) $x = 5$; c) $x = 3$; d) $x = 4$; e) $x = -3$; f) $x = 0$.

11. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, atunci $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este egală cu: **(5 pct.)**

    a) -2; b) 5; c) -4; d) 4; e) 2; f) 7.

12. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - 3x$. Atunci $h'(1)$ este: **(5 pct.)**

    a) $\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) -4; f) $-\frac{2}{3}$.

13. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|x - 1| = 3$ este: **(5 pct.)**

    a) $\{5\}$; b) $\{5, 7\}$; c) $\{3\}$; d) $\emptyset$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{-2, 4\}$.

14. Fie funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 2, & x < 0 \\ x + m, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este continuă. **(5 pct.)**

    a) $m = 5$; b) $m = 7$; c) $m = 4$; d) $m = 2$; e) $m = 11$; f) $m = 1$.

15. Fie $E = \sqrt{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{16}$. Atunci: **(5 pct.)**

    a) $E = 1$; b) $E = 12$; c) $E = 7$; d) $E = 6$; e) $E = 3$; f) $E = 28$.

16. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2\ln|x| = mx^2 + 1$ are două soluţii reale distincte este: **(5 pct.)**

a) $m \in (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e^2}\}$; b) $m \in (-\infty, \frac{1}{e^2}]$; c) $m \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$;

d) $m \in \{\frac{1}{e^2}\} \cup (1, e]$; e) $m \in (-\infty, -\frac{1}{e^2}] \cup [\frac{1}{e^2}, 1]$; f) $m \in (-\infty, 1)$.

17. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) g are două puncte de extrem; b) g este descrescătoare; c) g este crescătoare;

d) g este convexă; e) $g'(0) = 7$; f) g este concavă.

18. Pentru $m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$z_1 * z_2 = mz_1z_2 - im(z_1 + z_2) - m + i, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Să se calculeze suma modulelor valorilor lui m pentru care simetricul elementului $1+i$ este $2+i$. **(5 pct.)**

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) 2; e) 1; f) 4.

1. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **(5 pct.)**

   a) $D = 5$; b) $D = 4$; c) $D = 2$; d) $D = 1$; e) $D = 0$; f) $D = 3$.

   Soluţie. Aplicând regula lui Sarrus, obţinem $D = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-6\cdot8\cdot1 = 0$.

   Altfel. Scăzând prima linie a determinantului din liniile a doua şi a treia, rezultă $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

   Ultimele două linii fiind proporţionale, rezultă $D = 0$.

2. Să se calculeze $I = \int_0^1 (x^2 - x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $I = \frac{2}{3}$; b) $I = 0$; c) $I = \frac{1}{2}$; d) $I = -\frac{1}{6}$; e) $I = 2$; f) $I = 6$.

   Soluţie. Aplicând formula Leibnitz-Newton, integrala se rescrie $I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

3. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $|z| = 0$; b) $|z| = \sqrt{5}$; c) $|z| = \sqrt{7}$; d) $|z| = 6$; e) $|z| = 4$; f) $|z| = -1$.

   Soluţie. Obţinem $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

4. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - x - 2 = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 3; e) 0; f) 5.

   Soluţie. Folosind relaţiile lui Viete, rezultă că suma celor două rădăcini este $x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$. *Altfel.* Rezolvăm ecuaţia de gradul doi:

   $$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm 3}{2}\right\},$$

   deci $x \in \{2, -1\}$ iar suma celor două rădăcini este $x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$.

5. Calculaţi $E = C_5^2 + C_5^3$. **(5 pct.)**

   a) $E = 20$; b) $E = 10$; c) $E = 2$; d) $E = -5$; e) $E = 0$; f) $E = 15$.

   Soluţie. Aplicând formula combinărilor, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, rezultă

   $$E = C_5^3 + C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{6\cdot2} + \frac{120}{2\cdot6} = 10 + 10 = 20.$$

   Altfel. Aplicăm formula combinărilor, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ şi egalitatea $C_n^k = C_n^{n-k}$. Obţinem

   $$E = C_5^3 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^{5-2} = C_5^3 + C_5^3 = 2C_5^3 = 2\frac{5!}{3!2!} = 2\frac{120}{6\cdot2} = 2\cdot10 = 20.$$

6. Soluţia reală a ecuaţiei $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x$ este: **(5 pct.)**

   a) -1; b) 0; c) $-\frac{1}{11}$; d) 1; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{3}{5}$.

   Soluţie. Obţinem succesiv $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x \Leftrightarrow 4x - 3 + 3 = 6x \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

7. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$ **(5 pct.)**

   a) $x = 4, y = 0$; b) $x = 5, y = -4$; c) $x = 0, y = -1$;
   d) $x = -1, y = 3$; e) $x = -2, y = -2$; f) $x = 2, y = 1$.

   Soluţie. Din prima ecuaţie rezultă $y = x + 1$; înlocuind în a doua ecuaţie, obţinem $3y = 3$, deci $y = 1$ şi $x = 2$.

8. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $C = AB - BA$. **(5 pct.)**

a) $C = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$; b) $C = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 1 \\ -9 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; c) $C = \left(\begin{smallmatrix} -7 & -5 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; d) $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; e) $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$; f) $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $AB - BA = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 1 \\ -9 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

9. Ecuaţia $\sqrt{x-1} + x = 7$ are soluţia: **(5 pct.)**

a) $x = 0$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 2$; f) $x = 6$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $\sqrt{x-1} + x = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 7 - x$. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 1$. Se observă că în egalitate membrul drept trebuie să fie pozitiv, deci $7 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$. Prin urmare ecuaţia conduce la condiţia $x \in [1, 7]$. Ridicând la pătrat ambii membri obţinem ecuaţia $x^2 - 15x + 50 = 0$, de unde $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$. Se observă că $x_2 \notin [1, 7]$, deci nu este soluţie. De asemenea, se observă că această valoare nu satisface ecuaţia iniţială. Înlocuind $x_1 = 5$ în ecuaţia iniţială obţinem o identitate, deci singura soluţie a ecuaţiei este $x = 5$.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 8$. **(5 pct.)**

a) $x = 2$; b) $x = 5$; c) $x = 3$; d) $x = 4$; e) $x = -3$; f) $x = 0$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3$. Prin logaritmare în baza 2, obţinem $x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

11. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, atunci $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este egală cu: **(5 pct.)**

a) -2; b) 5; c) -4; d) 4; e) 2; f) 7.

Soluţie. Ţinând cont de relaţiile Viete, rezultă

$$E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

12. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - 3x$. Atunci $h'(1)$ este: **(5 pct.)**

a) $\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) -4; f) $-\frac{2}{3}$.

Soluţie. Derivata funcţiei h este $h'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $h'(1) = 0$.

13. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|x - 1| = 3$ este: **(5 pct.)**

a) $\{5\}$; b) $\{5, 7\}$; c) $\{3\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{-2, 4\}$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3$. Rezultă $x \in \{-2, 4\}$.

14. Fie funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 2, & x < 0 \\ x + m, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este continuă. **(5 pct.)**

a) $m = 5$; b) $m = 7$; c) $m = 4$; d) $m = 2$; e) $m = 11$; f) $m = 1$.

Soluţie. Limitele laterale ale funcţiei f în 0 sunt $\ell_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 2$, $\ell_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = m$, şi avem $f(0) = m$. Funcţia f este continuă în 0 dacă $\ell_s(0) = \ell_d(0) = f(0)$, de unde $m = 2$.

15. Fie $E = \sqrt{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{16}$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $E = 1$; b) $E = 12$; c) $E = 7$; d) $E = 6$; e) $E = 3$; f) $E = 28$.

Soluţie. $E = 2 + 2 + 2 = 6$.

16. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2\ln|x| = mx^2 + 1$ are două soluţii reale distincte este: **(5 pct.)**

a) $m \in (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e^2}\}$; b) $m \in (-\infty, \frac{1}{e^2}]$; c) $m \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$;

d) $m \in \{\frac{1}{e^2}\} \cup (1, e]$; e) $m \in (-\infty, -\frac{1}{e^2}] \cup [\frac{1}{e^2}, 1]$; f) $m \in (-\infty, 1)$.

Soluţie. Existenţa logaritmului conduce la condiţia $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Obţinem $2\ln|x| = mx^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2\ln|x| - 1}{x^2} = m$. Fie funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2\ln|x| - 1}{x^2}$. Atunci, ecuaţia $2\ln|x| = mx^2 + 1$ are două soluţii reale distincte $\Leftrightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are două soluţii reale distincte. Avem $f'(x) = \frac{4(1 - \ln|x|)}{x^3}$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este

x	$-\infty$		$-e$		0		e		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-\vert+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty\vert+\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

Din tabelul de variaţie al funcţiei deducem că ecuaţia are două rădăcini reale distincte doar dacă $m \in (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e^2}\}$.

17. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) g are două puncte de extrem; b) g este descrescătoare; c) g este crescătoare;

d) g este convexă; e) $g'(0) = 7$; f) g este concavă.

Soluţie. Avem $g'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^4}$ şi $g''(x) = e^{x^4}(2 + 2x \cdot 4x^3) = 2e^{x^4}(4x^4 + 1) > 0$, deci g este funcţie convexă.

18. Pentru $m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$z_1 * z_2 = mz_1z_2 - im(z_1 + z_2) - m + i, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Să se calculeze suma modulelor valorilor lui m pentru care simetricul elementului $1+i$ este $2+i$. **(5 pct.)**

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) 2; e) 1; f) 4.

Soluţie. Condiţia care defineşte elementul neutru al legii de compoziţie este

$$\begin{aligned} z * e = z, \forall z \in \mathbb{C} \quad &\Leftrightarrow mez - im(e + z) - m + i = z, \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow z(me - mi - 1) + (i - m - ime) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} me - mi - 1 = 0 \\ i - m - ime = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se observă că înmulţind prima ecuaţie cu $-i$, se obţine a doua ecuaţie. Prima ecuaţie conduce la elementul neutru, $e = \frac{im+1}{m}$. Simetricul elementului $1 + i$ este $2 + i$ doar dacă avem condiţiile echivalente

$$\begin{aligned} (1 + i) * (2 + i) = e \quad &\Leftrightarrow m(1 + i)(2 + i) - im(1 + i + 2 + i) - m - i = \tfrac{im+1}{m} \\ &\Leftrightarrow 2m + i \quad = \tfrac{im+1}{m} \Leftrightarrow 2m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deci $m_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde $|m_1| + |m_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Admitere * Universitatea Politehnica din Bucureşti 2013
Disciplina: Algebră şi Elemente de Analiză Matematică
Varianta A

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x^2+5} = x+1$. **(5 pct.)**
   a) $x=-2$; b) $x=4$; c) $x=0$; d) $x=2$; e) $x=3$; f) $x=-1$.
2. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**
   a) 13; b) 18; c) 0; d) 11; e) 1; f) 14.
3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(5 pct.)**
   a) 1; b) $3e$; c) e^2; d) $3+e$; e) $1+e$; f) $2e$.
4. Să se calculeze $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4$. **(5 pct.)**
   a) 6; b) 8; c) 18; d) 16; e) 24; f) 20.
5. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+3} = 16$. **(5 pct.)**
   a) $x=1$; b) $x=-3$; c) $x=5$; d) $x=-4$; e) $x=11$; f) $x=-1$.
6. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{3+4i}{6-8i}$. **(5 pct.)**
   a) 3; b) 4; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) 8; f) 11.
7. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $|x+1| = 2$ este: **(5 pct.)**
   a) 12; b) 0; c) -3; d) 1; e) 4; f) -5.
8. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x=1$ să fie soluţie a ecuaţiei $3x+m-2=0$. **(5 pct.)**
   a) $m=0$; b) $m=7$; c) $m=-1$; d) $m=4$; e) $m=1$; f) $m=-5$.
9. Să se rezolve inecuaţia $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. **(5 pct.)**
   a) $x \in [0,1]$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in [1,2]$; d) $x \geq 5$; e) $x \in [-4,1]$; f) $x \in [2,5]$.
10. Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $2x^2-3x+1=0$, atunci x_1+x_2 este: **(5 pct.)**
    a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.
11. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică astfel încât $a_1+a_3=6$ şi $a_3-a_1=4$. Să se calculeze a_5. **(5 pct.)**
    a) 15; b) 7; c) 10; d) 11; e) -5; f) 9.
12. Să se rezolve inecuaţia $2x-3 \leq 4x$. **(5 pct.)**
    a) $x \in (0,\infty)$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in (-1,2)$; d) $x \in [-\frac{3}{2},+\infty)$; e) $x \in (\frac{4}{3},+\infty)$; f) $x \in (0,1)$.
13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.
    Să se calculeze $S = f(-\sqrt{3}) + f(-\ln 2) + f(1) + f(\ln 3)$. **(5 pct.)**
    a) $\frac{9\pi}{4}$; b) $\frac{8\pi}{3}$; c) $\frac{13\pi}{6}$; d) $\frac{7\pi}{3}$; e) $\frac{11\pi}{4}$; f) $\frac{13\pi}{4}$.
14. Fie polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 4X$ şi fie T suma pătratelor rădăcinilor sale. Atunci: **(5 pct.)**
    a) $T=15$; b) $T=17$; c) $T=14$; d) $T=0$; e) $T=-11$; f) $T=11$.
15. Să se calculeze $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg 0,25$. **(5 pct.)**
    a) $E=\frac{1}{4}$; b) $E=7$; c) $E=13$; d) $E=2$; e) $E=\frac{1}{5}$; f) $E=5$.
16. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx$. **(5 pct.)**
    a) $\ell=1$; b) $\ell=1+\ln 2$; c) $\ell=\frac{1}{4}$; d) $\ell=3\ln 2$; e) $\ell=\frac{11}{4}$; f) $\ell=\ln\sqrt{2}$.
17. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; să se calculeze determinantul matricei A^2. **(5 pct.)**
    a) 1; b) 0; c) 3; d) 2; e) 4; f) -1.
18. Fie S mulţimea soluţiilor reale şi strict pozitive ale ecuaţiei $x + \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**
    a) $S \subset \mathbb{N}$; b) $S = \emptyset$; c) $S \subset (2,3)$; d) $S \cap (0,1) \neq \emptyset$; e) $S \cap (1,2) \neq \emptyset$; f) $S \cap (2,\infty) \neq \emptyset$.

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x^2+5} = x+1$. **(5 pct.)**

   a) $x=-2$; b) $x=4$; c) $x=0$; d) $x=2$; e) $x=3$; f) $x=-1$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului $x^2+5 \geq 0$ este totdeauna satisfăcută, deci nu conduce la limitarea domeniului necunoscutei x. În schimb, se observă că pozitivitatea membrului stâng al ecuaţiei conduce la condiţia $x+1 \geq 0$, deci $x \in [-1,\infty)$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem, după simplificări, $2x=4$, deci $x=2 \in [-1,\infty)$, şi deci $x=2$, deci este unica soluţie a ecuaţiei. *Notă.* Se observă că subiectul fiind de tip grilă, răspunsul corect se putea evidenţia prin simpla înlocuire a variantelor de răspuns în ecuaţie ($x=2$ fiind singura variantă care satisface ecuaţia).

2. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 13; b) 18; c) 0; d) 11; e) 1; f) 14.

   Soluţie. Calculul se poate face în multe moduri: aplicând regula Sarrus, regula (echivalentă) a triunghiului, dezvoltând după o linie sau după o colană sau efectuând în prealabil operaţii cu determinanţi care duc la simplificarea formei acestuia ("fabricare" de zerouri pe o linie sau pe o coloană). Spre exemplu, dezvoltând după regula Sarrus, obţinem:

$$1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot2+3\cdot3\cdot3-(1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3)=1+8+27-3\cdot6=18.$$

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) $3e$; c) e^2; d) $3+e$; e) $1+e$; f) $2e$.

   Soluţie. Aplicăm regula derivării produsului de funcţii $(g\cdot h)'=g'\cdot h+g\cdot h'$ pentru produsul $f(x)=x\cdot e^x$. Obţinem $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)e^x$. Deci $f'(1)=2e$.

4. Să se calculeze $C_5^0+C_5^2+C_5^4$. **(5 pct.)**

   a) 6; b) 8; c) 18; d) 16; e) 24; f) 20.

   Soluţie. Aplicăm regula de calcul a combinărilor $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ şi convenţia $0!=1$. Obţinem

$$C_5^0+C_5^2+C_5^4=\frac{5!}{5!0!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!1!}=1+10+5=16.$$

   Notă. Subiectul se putea rezolva mult mai elegant dacă se cunoaşte binomul lui Newton $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$ (folosit pentru $a=b=1, n=5$) şi proprietatea $C_n^k=C_n^{n-k}$ (utilizată pentru valorile $n=5$, $k\in\{0,2,4\}$). Se obţine

$$2^5=(1+1)^5=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=(C_5^0+C_5^2+C_5^4)+(C_5^5+C_5^3+C_5^1)=2(C_5^0+C_5^2+C_5^4),$$

   de unde rezultă $C_5^0+C_5^2+C_5^4=2^5/2=16$.

5. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+3}=16$. **(5 pct.)**

   a) $x=1$; b) $x=-3$; c) $x=5$; d) $x=-4$; e) $x=11$; f) $x=-1$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+3}=2^4$ de unde (prin logaritmare în baza 2) rezultă $x+3=4$, deci $x=1$.

6. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{3+4i}{6-8i}$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) 4; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) 8; f) 11.

   Soluţie. Amplificăm fracţia cu conjugata numitorului, apoi folosim formula $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$. Obţinem

$$z=\frac{(3+4i)(6+8i)}{6^2+8^2}=\frac{-14+48i}{100}=\frac{-7+24i}{50}=-\frac{7}{50}+i\frac{24}{50}.$$

Rezultă
$$|z| = \sqrt{\frac{49}{2500} + \frac{576}{2500}} = \sqrt{\frac{625}{2500}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Notă. Subiectul se putea rezolva mult mai rapid folosind proprietatea modulului: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Se obţine:
$$|z| = \left|\frac{3+4i}{6-8i}\right| = \frac{|3+4i|}{|6+8i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

7. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $|x+1| = 2$ este: **(5 pct.)**

   a) 12; b) 0; c) -3; d) 1; e) 4; f) -5.

   Soluţie. Folosind proprietatea "$|a| = b \Leftrightarrow (a = b$ sau $a = -b)$", obţinem $x + 1 \in \{\pm 2\}$, deci $x \in \{1, -3\}$. Produsul celor două soluţii este deci $1 \cdot (-3) = -3$.

8. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = 1$ să fie soluţie a ecuaţiei $3x + m - 2 = 0$. **(5 pct.)**

   a) $m = 0$; b) $m = 7$; c) $m = -1$; d) $m = 4$; e) $m = 1$; f) $m = -5$.

   Soluţie. Înlocuind soluţia $x = 1$ în ecuaţie, obţinem $3 + m - 2 = 0$, deci $m = -1$.

9. Să se rezolve inecuaţia $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. **(5 pct.)**

   a) $x \in [0,1]$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in [1,2]$; d) $x \geq 5$; e) $x \in [-4,1]$; f) $x \in [2,5]$.

   Soluţie. Folosind formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ care produce soluţiile ecuaţiei de gradul doi $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$, obţinem $x \in \{\frac{3 \pm \sqrt{3^2-8}}{2}\} = \{\frac{3 \pm 1}{2}\} = \{1, 2\}$. Deoarece $a = 1 > 0$, valoarea expresiei polinomiale de gradul doi din enunţ este negativă sau nulă (în cazul rădăcinilor reale distincte) d.n.d. $x \in [x_1, x_2]$, unde s-a presupus $x_1 < x_2$. Rezultă $x \in [1, 2]$.

10. Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $2x^2 - 3x + 1 = 0$, atunci $x_1 + x_2$ este: **(5 pct.)**

    a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

    Soluţie. Din prima relaţie Viéte rezultă direct $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$. *Notă.* Problema se poate rezolva şi determinând efectiv soluţiile ecuaţiei, $\{x_{1,2}\} = \{\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}\} = \{\frac{1}{2}, 1\}$; prin urmare suma acestora este $\frac{3}{2}$.

11. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică astfel încât $a_1 + a_3 = 6$ şi $a_3 - a_1 = 4$. Să se calculeze a_5. **(5 pct.)**

    a) 15; b) 7; c) 10; d) 11; e) -5; f) 9.

    Soluţie. Sumând cele două condiţii rezultă $2a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = 5$; scăzându-le, rezultă $2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$. Dar $a_3 = \frac{a_1+a_5}{2}$, deci $a_5 = 2a_3 - a_1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. *Altă soluţie.* Aplicăm formula $a_k = a_1 + (k-1)r$. Notând $a = a_1$, cele două condiţii formează un sistem liniar în necunoscutele a, r, compatibil determinat, $\begin{cases} 2a + 2r = 6 \\ 2r = 4 \end{cases}$, deci $a = 1, r = 2$. Prin urmare, $a_5 = a + 4r = 1 + 4 \cdot 2 = 9$.

12. Să se rezolve inecuaţia $2x - 3 \leq 4x$. **(5 pct.)**

    a) $x \in (0, \infty)$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in (-1, 2)$; d) $x \in [-\frac{3}{2}, +\infty)$; e) $x \in (\frac{4}{3}, +\infty)$; f) $x \in (0, 1)$.

    Soluţie. Inecuaţia se rescrie succesiv: $2x - 3 \leq 4x \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$.

13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.
    Să se calculeze $S = f(-\sqrt{3}) + f(-\ln 2) + f(1) + f(\ln 3)$. **(5 pct.)**

    a) $\frac{9\pi}{4}$; b) $\frac{8\pi}{3}$; c) $\frac{13\pi}{6}$; d) $\frac{7\pi}{3}$; e) $\frac{11\pi}{4}$; f) $\frac{13\pi}{4}$.

    Soluţie. Se poate verifica folosind tabloul de variaţie al funcţiilor corespunzătoare, că expresiile $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ şi $\frac{2x}{1+x^2}$ iau valori în intervalul $[-1, 1]$, deci funcţia f este bine definită pe toată axa reală. Fiind compunere de funcţii continue, f este funcţie continuă. Mai mult, se observă că $f = f_1 + f_2$, unde $f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ şi $f_2(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Se constată că ambele funcţii sunt continue. Derivatele $f'_{1,2}$ ale acestora coincid în domeniul $D = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, deci pe fiecare din cele două intervale ale reuniunii, cele două funcţii diferă printr-o constantă. Mai exact, pe intervalul $(-\infty, -1)$ avem $f_1(-2) = \arccos \frac{-3}{5} = \pi - \arccos \frac{3}{5} = \pi - \arcsin \frac{4}{5} = \pi + \arcsin \frac{-4}{5} = \pi + f_2(-2)$, deci $f_1 = \pi + f_2$ şi $f(x) = 2f_1(x) - \pi$. Pe intervalul $(0, 1)$ avem $f_1(\frac{1}{2}) = \arccos \frac{3}{5} = \arcsin \frac{4}{5} = f_2(x)$, deci $f_1(x) = f_2(x)$ şi $f(x) = 2f_1(x)$.

Pentru $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ avem $f_1'(x) = -f_2'(x) \Rightarrow f'(x) = 0$, deci pe $\mathbb{R} \backslash D = [-1,0] \cup [1,\infty) = (-1,0) \cup (1,\infty)$, funcţia continuă f este constantă pe fiecare interval al reuniunii. Mai exact, pe intervalul $[-1,0]$ funcţia f are valoarea $f(-1) = \arccos(1) + \arcsin(0) = 0$ iar pe intervalul $[1,\infty)$ f are valoarea $f(1) = \arccos(0) + \arcsin(1) = \pi$. Prin urmare,

$$f(x) = \begin{cases} 2\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - \pi, & \text{pentru } x \in (-\infty,-1) \\ 0, & \text{pentru } x \in [-1,0] \\ 2\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, & \text{pentru } x \in (0,1) \\ \pi, & \text{pentru } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Calculăm termenii sumei cerute:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \in (1,2) \Rightarrow -\sqrt{3} \in (-2,-1) \subset (-\infty,-1) & \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \pi \\ & \qquad = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} \\ \ln 1 < \ln 2 < \ln e \Rightarrow -\ln 2 \in (-\ln e, -\ln 1) \subset [-1,0] & \Rightarrow f(-\ln 2) = 0 \\ 1 \in [1,\infty) & \Rightarrow f(1) = \pi \\ \ln e < \ln 3 < \ln e^2 \Rightarrow \ln 3 \in (1,2) \subset [1,\infty) & \Rightarrow f(\ln e) = \pi. \end{cases}$$

deci $S = \frac{\pi}{3} + 0 + \pi + \pi = \frac{7\pi}{3}$.

14. Fie polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 4X$ şi fie T suma pătratelor rădăcinilor sale. Atunci: **(5 pct.)**

a) $T = 15$; b) $T = 17$; c) $T = 14$; d) $T = 0$; e) $T = -11$; f) $T = 11$.

Soluţie. Notăm cu $x_{1,2,3}$ cele trei rădăcini ale polinomului. Folosind egalitatea

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

şi primele două relaţii Viéte

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-5}{1} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4}{1} \end{cases}$$

rezultă

$$T = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 5^2 - 2 \cdot 4 = 17.$$

Notă. Subiectul se putea rezolva şi altfel, aflând efectiv rădăcinile polinomului f. Dând factor comun X şi aflând rădăcinile factorului de grad 2, obţinem succesiv $f = X(X^2 - 5X + 4) = (X-0)(X-1)(X-4)$. Deci cele trei rădăcini ale polinomului f sunt $0, 1, 4$, iar suma pătratelor lor este $T = 0^2 + 1^2 + 4^2 = 17$.

15. Să se calculeze $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg 0,25$. **(5 pct.)**

a) $E = \frac{1}{4}$; b) $E = 7$; c) $E = 13$; d) $E = 2$; e) $E = \frac{1}{5}$; f) $E = 5$.

Soluţie. Notăm $a = \lg 5$, $b = \lg 2$. Observăm că $a + b = \lg 5 + \lg 2 = \lg 10 = 1$. Folosind proprietăţile logaritmilor şi relaţia $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$ pentru $u = a$ şi $v = a + 2b$, obţinem succesiv

$$\begin{aligned} E &= a^3 + (a+2b)^3 + (3b) \cdot (-2b) = [a + (a+2b)] \cdot [a^2 - a(a+2b) + (a+2b)^2] - 6b^2 \\ &= [2(a+b)] \cdot [(a+b)^2 + 3b^2] - 6b^2 = 2(1 + 3b^2) - 6b^2 = 2. \end{aligned}$$

16. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx$. **(5 pct.)**

a) $\ell = 1$; b) $\ell = 1 + \ln 2$; c) $\ell = \frac{1}{4}$; d) $\ell = 3\ln 2$; e) $\ell = \frac{11}{4}$; f) $\ell = \ln\sqrt{2}$.

Soluţie. Se observă că ridicarea la pătrat $\varphi : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $\varphi(x) = x^2$ este bijecţie şi că avem $\varphi(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Putem folosi prin urmare schimbarea de variabilă $u = x^2$. Integrala se rescrie succesiv

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx &= \frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x}{x^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{u(u+1)}du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t^2}{t^2+1} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Atunci

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{2t^2}{t^2+1} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

17. Fie $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; să se calculeze determinantul matricei A^2. **(5 pct.)**

a) 1; b) 0; c) 3; d) 2; e) 4; f) -1.

Soluţie. Obţinem $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Atunci $\det A = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-4) = 1$. *Notă.* Rezolvarea se scurtează, evitând calculul produsului matriceal, dacă se foloseşte proprietatea $\det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$ pentru $A_1 = A_2 = A$. Obţinem $\det(A^2) = (\det A)^2 = (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2))^2 = 1^2 = 1$.

18. Fie S mulţimea soluţiilor reale şi strict pozitive ale ecuaţiei $x + \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $S \subset \mathbb{N}$; b) $S = \varnothing$; c) $S \subset (2,3)$; d) $S \cap (0,1) \neq \varnothing$; e) $S \cap (1,2) \neq \varnothing$; f) $S \cap (2,\infty) \neq \varnothing$.

Soluţie. Soluţiile ecuaţiei date sunt punctele de anulare ale funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt - \left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in (0,\infty).$$

Se verifică relativ uşor că derivata $f'(x) = e^{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2}$ este strict pozitivă pentru $x \in (0,\infty)$ şi că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Rezultă că ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură soluţie în intervalul $(0,\infty)$. Pentru a afla un subinterval care conţine soluţia, observăm că $t^2 \leq t$, $\forall t \in [0,1]$, deci

$$f(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt - 2 \leq \int_0^1 e^t dt - 2 = (e^1 - e^0) - 2 = e - 3 < 0,$$

deci $f(1) < 0$. Pe de altă parte, folosind monotonia integralei definite în raport cu intervalul de integrare pentru integranzi pozitivi şi proprietatea $t^2 \geq t$, $\forall t \in [1,2]$, avem

$$f(2) = \int_0^2 e^{t^2} dt - 2 - \frac{1}{2} \geq \int_1^2 e^{t^2} dt - 2.5 \geq \int_1^2 e^t dt - 2.5 = e^2 - e - 2.5 > (2.5)^2 - 3 - 2.5 = 0.75 > 0,$$

deci $f(2) > 0$. Prin urmare, funcţia f fiind continuă, soluţia căutată se află în intervalul $(1,2)$. Rezultă $S \cap (1,2) \neq \varnothing$.

1. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{3x+1} = x+1$ este: **(5 pct.)**
   a) $\{-1,3\}$; b) $\{1,3\}$; c) $\{0,1\}$; d) $\emptyset$; e) $\{\sqrt{2},2\}$; f) $\{-1,1\}$.
2. Fie $S = 2C^1_{2014} - C^{2013}_{2014}$. Atunci: **(5 pct.)**
   a) $S = 2013$; b) $S = 2012$; c) $S = 2010$; d) $S = 1012$; e) $S = 2020$; f) $S = 2014$.
3. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$. Abscisa punctului de extrem al funcţiei f este: **(5 pct.)**
   a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{1}{e^2}$; c) $x = e$; d) $x = e^2$; e) $x = \frac{1}{e}$; f) $x = 1$.
4. Fie progresia aritmetică $1, 4, 7, 10, \ldots$. Să se calculeze al 2014-lea termen al progresiei. **(5 pct.)**
   a) 5012; b) 6040; c) 6041; d) 1258; e) 6039; f) 5420.
5. Suma soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$ este: **(5 pct.)**
   a) $\sqrt{2}$; b) $1+\sqrt{2}$; c) 0; d) 2014; e) 5; f) -2.
6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to|R$, $f(x) = 4x+3$. Să se determine mulţimea $A = \{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x) > 1\}$. **(5 pct.)**
   a) $A = \mathbb{R}$; b) $A = \emptyset$; c) $A = [-1,\infty)$; d) $A = \{-2\}$; e) $A = (-\frac{1}{2},\infty)$; f) $A = (-\infty,0)$.
7. Modulul numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$ este: **(5 pct.)**
   a) $\sqrt{2}$; b) 2; c) 3; d) $\sqrt{3}$; e) $\sqrt{5}$; f) 1.
8. Să se calculeze produsul P al soluţiilor ecuaţiei $3x^2 - 2x - 1 = 0$. **(5 pct.)**
   a) $P = 2$; b) $P = 3$; c) $P = 1$; d) $P = \frac{1}{2}$; e) $P = -\frac{1}{3}$; f) $P = -1$.
9. Să se calculeze termenul care nu-l conţine pe x din dezvoltarea $(x+\frac{1}{x})^{10}$. **(5 pct.)**
   a) C^3_{10}; b) C^2_{10}; c) $2C^8_{10}$; d) 3; e) C^1_{10}; f) C^5_{10}.
10. Soluţia ecuaţiei $\log_2(x^2+1) - \log_2 x = 1$ este: **(5 pct.)**
    a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = \sqrt{2}$; d) $x = 1$; e) $x = 3$; f) $x = 0$.
11. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^{x^2+x+2} = 9$ este: **(5 pct.)**
    a) $\{-1,0\}$; b) $\{-2,2\}$; c) $\{0,4\}$; d) $\emptyset$; e) $\{1,3\}$; f) $\{-1,1\}$.
12. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Atunci: **(5 pct.)**
    a) $f'(1) = 3e$; b) $f'(1) = 2$; c) $f'(1) = 2+e$; d) $f'(1) = 0$; e) $f'(1) = e$; f) $f'(1) = e^2$.
13. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Atunci A^2 este: **(5 pct.)**
    a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 31 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}$.
14. Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 (x^3+2x)\mathrm{d}x$. **(5 pct.)**
    a) $I = \frac{1}{2}$; b) $I = \frac{3}{2}$; c) $I = \frac{5}{2}$; d) $I = \frac{7}{2}$; e) $I = \frac{1}{4}$; f) $I = \frac{5}{4}$.
15. Fie polinomul $P = 2X^3 + 4X^2 - 5X + a$. Să se determine a astfel încât polinomul P să fie divizibil cu $X-1$. **(5 pct.)**
    a) $a = -3$; b) $a = 3$; c) $a = 0$; d) $a = -1$; e) $a = -2$; f) $a = 2$.
16. Fie f un polinom de gradul 2014 cu rădăcinile $-1, -2, -3, \ldots, -2014$. Pentru $x\in(-2,\infty)$, se consideră ecuaţia: $\displaystyle\int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \ln(x+2016) - x^2$. Dacă n este numărul soluţiilor negative şi m este numărul soluţiilor pozitive ale ecuaţiei date, atunci: **(5 pct.)**
    a) $n = 0, m = 2$; b) $n+m = 3$; c) $n = 1, m = 1$; d) $2n+m = 4$; e) $n = 0, m = 1$; f) $n = 1, m = 0$.

17. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dacă

$$M = \{x_0 \in (0, \infty) \mid \text{dreapta tangentă la graficul lui } f \text{ în punctul de abscisă } x_0 \text{ trece prin } A(2, 1)\}$$

şi $S = \sum_{x_0 \in M} x_0$, atunci: **(5 pct.)**

a) $S \in (3, 4)$; b) $S \in (\frac{3}{2}, 2)$; c) $S \in [1, \frac{3}{2})$; d) $S \in (4, 5)$; e) $S \in (2, 3)$; f) $S \in (5, 6)$.

18. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$ este: **(5 pct.)**

a) $\{1, \frac{-1 \pm \sqrt[3]{5}}{2}\}$; b) $\{1, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\}$; c) $\{1, \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{2}\}$; d) $\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$; e) $\{1, \frac{-1 \pm \sqrt[3]{3}}{2}\}$; f) $\{1, \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}\}$.

1. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{3x+1} = x+1$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{-1,3\}$; b) $\{1,3\}$; c) $\{0,1\}$; d) $\varnothing$; e) $\{\sqrt{2},2\}$; f) $\{-1,1\}$.

   Soluţie. Existenţa radicalului şi pozitivitatea membrului stâng, care atrage după sine pozitivitatea membrului drept, conduc la condiţiile $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem

   $$3x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1\} \subset \left(-\frac{1}{3}, \infty\right),$$

   deci mulţimea soluţiilor este $\{0,1\}$.

   *Altfel.*Se testează succesiv valorile date de fiecare din cele 6 variante. Există o singura mulţime nevidă ale cărei elemente satisfac ambele ecuaţia dată, $\{0,1\}$.

2. Fie $S = 2C_{2014}^1 - C_{2014}^{2013}$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $S = 2013$; b) $S = 2012$; c) $S = 2010$; d) $S = 1012$; e) $S = 2020$; f) $S = 2014$.

   Soluţie. Se observă că $C_{2014}^{2013} = C_{2014}^1 = \frac{2014!}{2013! \cdot 1!} = 2014$, deci $S = C_{2014}^1 = 2014$.

3. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$. Abscisa punctului de extrem al funcţiei f este: **(5 pct.)**

   a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{1}{e^2}$; c) $x = e$; d) $x = e^2$; e) $x = \frac{1}{e}$; f) $x = 1$.

   Soluţie. Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci extremele acesteia sunt printre punctele de anulare a derivatei. Dar $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x-1}{x}$, iar $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tabelul de variatie al funcţiei f este

x	0		1		∞
$f'(x)$	$\vert$	$+$	0	$-$	-1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

   deci punctul $(1,-1)$ este singurul punct de extrem al funcţiei f (punct de maxim), iar abscisa acestuia este $x = 1$.

4. Fie progresia aritmetică $1, 4, 7, 10, \ldots$. Să se calculeze al 2014-lea termen al progresiei. **(5 pct.)**

   a) 5012; b) 6040; c) 6041; d) 1258; e) 6039; f) 5420.

   Soluţie. Avem $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10$, deci raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = 3$. Atunci pentru $n = 2014$, obţinem $a_{2014} = a_1 + (n-1)r = 1 + (2014-1) \cdot 3 = 6040$.

5. Suma soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) $1+\sqrt{2}$; c) 0; d) 2014; e) 5; f) -2.

   Soluţie. Calculăm determinantul, $\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - (-1) \cdot x^2$, deci ecuaţia se rescrie $x^2 - 16 = 0$ şi are soluţiile ± 4; suma acestora este $-4 + 4 = 0$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to |R$, $f(x) = 4x + 3$. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) > 1\}$. **(5 pct.)**

   a) $A = \mathbb{R}$; b) $A = \varnothing$; c) $A = [-1,\infty)$; d) $A = \{-2\}$; e) $A = (-\frac{1}{2},\infty)$; f) $A = (-\infty, 0)$.

   Soluţie. Relaţia din definiţia mulţimii A se rescrie $f(x) > 1 \Leftrightarrow 4x + 3 > 1 \Leftrightarrow 4x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, deci $.A = (-\frac{1}{2},\infty)$

7. Modulul numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) 2; c) 3; d) $\sqrt{3}$; e) $\sqrt{5}$; f) 1.

   Soluţie. Amplificând fracţia cu conjugata numitorului, obţinem

   $$\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \left|\frac{(1-i)^2}{1^2 - i^2}\right| = \left|\frac{-2i}{2}\right| = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

   Altfel. Folosim relaţia $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, şi obţinem $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \frac{|1-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

8. Să se calculeze produsul P al soluţiilor ecuaţiei $3x^2 - 2x - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) $P = 2$; b) $P = 3$; c) $P = 1$; d) $P = \frac{1}{2}$; e) $P = -\frac{1}{3}$; f) $P = -1$.

Soluţie. Folosind a doua (ultima) relaţie Viéte $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ pentru rădăcinile $x_{1,2}$ ale polinomului de gradul doi $ax^2 + bx + c$ pentru cazul nostru $(a = 3, b = -2, c = -1)$, rezultă $x_1x_2 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$.

Altfel. Rădăcinile ecuaţiei sunt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} = \frac{1 \pm 2}{3},$$

deci $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, iar produsul acestora este $x_1x_2 = -\frac{1}{3}$.

9. Să se calculeze termenul care nu-l conţine pe x din dezvoltarea $(x + \frac{1}{x})^{10}$. **(5 pct.)**

a) C_{10}^3; b) C_{10}^2; c) $2C_{10}^8$; d) 3; e) C_{10}^1; f) C_{10}^5.

Soluţie. Termenul de ordin $k + 1$ al binomului $(a + b)^n$ este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k = \overline{0, n}$. La noi, $n = 10, a = x, b = \frac{1}{x}$, deci $T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{10}^k x^{10-2k}$, şi deci T_{k+1} nu conţine x doar dacă puterea lui x este zero. Rezultă $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$, pentru care obţinem $T_6 = C_{10}^5$.

10. Soluţia ecuaţiei $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 1$ este: **(5 pct.)**

a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = \sqrt{2}$; d) $x = 1$; e) $x = 3$; f) $x = 0$.

Soluţie. Condiţiile de existenţă ale celor doi logaritmi sunt $\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, deci $x \in (0, \infty)$. Ecuaţia se rescrie $\log_2 \frac{x^2+1}{x} = \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0, \infty)$, deci soluţia căutată este $x = 1$.

11. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^{x^2+x+2} = 9$ este: **(5 pct.)**

a) $\{-1, 0\}$; b) $\{-2, 2\}$; c) $\{0, 4\}$; d) $\varnothing$; e) $\{1, 3\}$; f) $\{-1, 1\}$.

Soluţie. Eecuaţia se rescrie

$$3^{x^2+x+2} = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2+x+2} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}.$$

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $f'(1) = 3e$; b) $f'(1) = 2$; c) $f'(1) = 2 + e$; d) $f'(1) = 0$; e) $f'(1) = e$; f) $f'(1) = e^2$.

Soluţie. Derivata funcţiei f este $f'(x) = 2x + e^x$, deci $f'(1) = 2 + e$.

13. Fie matricea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Atunci A^2 este: **(5 pct.)**

a) $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 31 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{smallmatrix}\right)$; f) $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 10 \\ 18 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Soluţie. Avem $A^2 = A \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{smallmatrix}\right)$.

14. Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 (x^3 + 2x) \mathrm{d}x$. **(5 pct.)**

a) $I = \frac{1}{2}$; b) $I = \frac{3}{2}$; c) $I = \frac{5}{2}$; d) $I = \frac{7}{2}$; e) $I = \frac{1}{4}$; f) $I = \frac{5}{4}$.

Soluţie. Obţinem $I = \int_0^1 (x^3 + 2x) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

15. Fie polinomul $P = 2X^3 + 4X^2 - 5X + a$. Să se determine a astfel încât polinomul P să fie divizibil cu $X - 1$. **(5 pct.)**

a) $a = -3$; b) $a = 3$; c) $a = 0$; d) $a = -1$; e) $a = -2$; f) $a = 2$.

Soluţie. Conform teoremei Bezout, $(x - x_0) | P \Leftrightarrow P(x_0) = 0$, deci în cazul nostru pentru $x_0 = 1$ obţinem $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

16. Fie f un polinom de gradul 2014 cu rădăcinile $-1, -2, -3, \ldots, -2014$. Pentru $x \in (-2, \infty)$, se consideră ecuaţia: $\displaystyle\int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln(x+2016) - x^2$. Dacă n este numărul soluţiilor negative şi m este numărul soluţiilor pozitive ale ecuaţiei date, atunci: **(5 pct.)**

a) $n = 0, m = 2$; b) $n + m = 3$; c) $n = 1, m = 1$; d) $2n + m = 4$; e) $n = 0, m = 1$; f) $n = 1, m = 0$.

Soluţie. Polinomul f are gradul egal cu numărul de rădăcini distincte, deci ca o consecinţă a teoremei Bezout, f are forma $f(x) = a(x+1)(x+2)(x+3) \cdot \ldots \cdot (x+2014)$, unde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Folosind formula de derivare a produsului de funcţii, rezultă că derivata sa este

$$f'(x) = a \sum_{k=1}^{2014} (x+1)(x+2)(x+3) \cdot \ldots \cdot \widehat{(x+k)} \cdot \ldots \cdot (x+2014),$$

unde factorul cu circumflex este omis din podus. Atunci $\dfrac{f'(t)}{f(t)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{t+k}$, deci

$$\begin{aligned} \int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)} dt &= \sum_{k=1}^{2014} \int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{t+k} dt = \sum_{k=1}^{2014} \ln(t+k)|_{x+1}^{x+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2014} (\ln(x+k+2) - \ln(x+k+1)) = \ln(x+2016) - \ln(x+2). \end{aligned}$$

După simplificări, ecuaţia din enunţ se rescrie

$$\ln(x+2016) - \ln(x+2) = \ln(x+2016) - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \ln(x+2) = 0,$$

deci ecuaţia din enunţ se rescrie $g(x) = 0$, unde $g(x) = x^2 - \ln(x+2)$, $x \in (-2, \infty)$. Atunci $g'(x) = 2x - \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2+4x-1}{x+2}$, iar $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}\}$. Se observă că $\frac{-2-\sqrt{6}}{2} < -2$ iar $x_* = \frac{-2+\sqrt{6}}{2} \in (0; \frac{1}{2})$. Tabelul de variaţie al funcţiei g este

x	-2		0		x_*		∞
$f'(x)$	$\vert$	$-$	-0.5	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	y_*	$\nearrow$	$+\infty$

şi semnalează inegalitatea $y_* < -1 < 0$. Funcţia g fiind continuă, schimbările de semn ale acesteia arată că ecuaţia $g(x) = 0$ admite o soluţie negativă $x_- < 0$ şi una pozitivă $x_+ > x_* > 0$, şi deci $m = n = 1$.

17. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dacă

$$M = \{x_0 \in (0, \infty) \mid \text{dreapta tangentă la graficul lui } f \text{ în punctul de abscisă } x_0 \text{ trece prin } A(2,1)\}$$

şi $S = \displaystyle\sum_{x_0 \in M} x_0$, atunci: **(5 pct.)**

a) $S \in (3,4)$; b) $S \in (\frac{3}{2}, 2)$; c) $S \in [1, \frac{3}{2})$; d) $S \in (4,5)$; e) $S \in (2,3)$; f) $S \in (5,6)$.

Soluţie. Avem $f'(x) = \ln x + 1$, iar dreapta d din definiţia mulţimii M are ecuaţia

$$d: \ \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(x - x_0) \Leftrightarrow y = x(\ln x_0 + 1) - x_0,$$

iar condiţia $A(2,1) \in d$ se rescrie $x_0 - 2\ln x_0 - 1 = 0$. Aflarea soluţiilor x_0 ale acestei ecuaţii revine la rezolvarea ecuaţiei $g(x) = 0$, $x \in (0, \infty)$, unde $g(x) = x - 2\ln x - 1$. Obţinem $g'(x) = \frac{x-2}{x}$, iar tabelul de variaţie al funcţiei g este

x	0		$x_1 = 1$		2	3	x_2	4		∞
$g'(x)$	$\vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\ln \frac{e}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

unde $g(1) = 0$, $g(2) = \ln \frac{e}{4} < 0$, $g(3) = \ln \frac{e^2}{9} < 0$, $g(4) = \ln \frac{e^3}{16} > 0$. Dar g este conţinuă, iar schimbările de semn indică două puncte de anulare $x_1 = 1$, $x_2 \in (3,4)$, care formează mulţimea $M = \{x_1, x_2\}$. Atunci $S = \displaystyle\sum_{x_0 \in M} x_0 = x_1 + x_2 = 1 + x_2 \in (4,5)$.

18. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3+1$ este: **(5 pct.)**

a) $\{1, \frac{-1\pm\sqrt[3]{5}}{2}\}$; b) $\{1, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\}$; c) $\{1, \frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}\}$; d) $\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\}$; e) $\{1, \frac{-1\pm\sqrt[3]{3}}{2}\}$; f) $\{1, \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}\}$.

Soluţie. Notăm $u = \sqrt[3]{2x-1}$. Această egalitate împreună cu ecuaţia din enunţ conduce la sistemul echivalent

$$\begin{cases} u^3 = 2x-1 \\ 2u = x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 1 = 2(x-1) \\ x^3 - 1 = 2(u-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 1 = 2(x-1) \\ u^3 - x^3 = 2(x-u). \end{cases}$$

A doua ecuaţie a sistemului din dreapta - obţinută prin scăderea ecuaţiilor sistemului anterior - se rescrie

$$(u-x)\cdot(u^2+ux+x^2+2) = 0.$$

Se observă că a doua paranteză nu se poate anula, deoarece se poate rescrie prin restrângerea pătratelor sub forma $\left(u+\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 > 0$. Atunci, din anularea primei paranteze a produsului rezultă egaliatea $u = x$, care prin înlocuire în prima ecuaţie a sistemului conduce la

$$x^3 - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Admitere * Universitatea Politehnica din Bucureşti 2015
Disciplina: Algebră şi Elemente de Analiză Matematică
Varianta A * Facultăţi care au dat în 2014 examen de admitere

1. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x+1| \leq 3$ este: **(5 pct.)**
   a) $\{-4\}$; b) $\emptyset$; c) $\{2\}$; d) $[-4,2]$; e) $[-3,3]$; f) $[-4,0]$.

2. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ este: **(5 pct.)**
   a) $\{0,1,2\}$; b) $\{0,2\}$; c) $\{-1,0,1\}$; d) $\{1,2,3\}$; e) $\{-2,0,1\}$; f) $\{1,2,4\}$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+m, & x \leq 1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie continuă. **(5 pct.)**
   a) $m=2$; b) $m=\frac{1}{3}$; c) $m=\frac{1}{2}$; d) $m=-2$; e) $m=4$; f) $m=-5$.

4. Dacă $E = \log_2 20 - \log_4 25$, atunci: **(5 pct.)**
   a) $E=2$; b) $E=4$; c) $E=0$; d) $E=-2$; e) $E=3$; f) $E=-3$.

5. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2x+1}+2x=5$. **(5 pct.)**
   a) $x=11$; b) $x\in\left\{\frac{3}{2},4\right\}$; c) $x=4$; d) $x=\frac{3}{2}$; e) $x=\frac{1}{6}$; f) $x=15$.

6. Să se rezolve ecuaţia $5^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt{5}$. **(5 pct.)**
   a) $x=-1$; b) $x=1$; c) $x=-3$; d) $x=0$; e) $x=4$; f) $x=2$.

7. Într-o progresie geometrică de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2=3$ şi $a_4=12$. Să se calculeze a_3. **(5 pct.)**
   a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 8; d) 9; e) 4; f) 6.

8. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{2x}$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**
   a) -1; b) $\frac{1}{2}$; c) 4; d) $-\frac{3}{2}$; e) 3; f) -2.

9. Să se calculeze $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$. **(5 pct.)**
   a) $E=3$; b) $E=8$; c) $E=11$; d) $E=14$; e) $E=10$; f) $E=16$.

10. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$. **(5 pct.)**
    a) 1; b) 2; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$.

11. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y=m \\ 2x+y=n \end{cases}$. Să se determine numerele reale m şi n astfel încât $x=2$, $y=1$ să fie soluţie a sistemului. **(5 pct.)**
    a) $m=2$, $n=1$; b) $m=0$, $n=5$; c) $m=1$, $n=4$; d) $m=-1$, $n=3$; e) $m=3$, $n=1$; f) $m=4$, $n=3$.

12. Să se rezolve inecuaţia $3x-1 \geq 2x$. **(5 pct.)**
    a) $x\geq 1$; b) $x\in\emptyset$; c) $x\geq 5$; d) $x\in[-1,0]$; e) $x\leq\frac{1}{5}$; f) $x\leq\frac{1}{3}$.

13. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 x^{2015}\ln x\,dx$. **(5 pct.)**
    a) $-\infty$; b) $-\frac{1}{2016^2}$; c) $-\frac{1}{2015}$; d) $-\frac{1}{2014}$; e) $-\frac{1}{2015^2}$; f) 0.

14. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă. **(5 pct.)**
    a) $m\neq-\frac{1}{3}$; b) $m\neq 0$; c) $m\neq\frac{1}{2}$; d) $m\neq 1$; e) $m\neq-\frac{1}{4}$; f) $m\neq\frac{1}{4}$.

15. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln x$. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcţiei f. **(5 pct.)**
    a) $\frac{1}{e}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

16. Să se calculeze $\int_0^1 (x^3 + x)dx$. **(5 pct.)**

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{4}{5}$.

17. Câte soluţii reale are ecuaţia $|||x-1|-1|-1| = 1$? **(5 pct.)**

a) o infinitate; b) cinci; c) patru; d) şase; e) trei; f) două.

18. Fie polinomul $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$, unde $n \geq 3$ este număr natural, iar $m \in \mathbb{C}$. Să se determine m astfel încât f să fie divizibil cu $X^2 + X + 1$. **(5 pct.)**

a) $m = -2$; b) $m = 2i$; c) $m = 18$; d) $m = 2$; e) $m = 4$; f) $m = -2i$.

1. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x+1| \leq 3$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{-4\}$; b) $\varnothing$; c) $\{2\}$; d) $[-4,2]$; e) $[-3,3]$; f) $[-4,0]$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Distingem cazurile (i) $x+1 \geq 0$ $(x \geq -1)$, când inecuaţia devine $x+1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 2$, cu soluţiile $S_1 = [-1,\infty) \cap (-\infty, 2] = [-1,2]$, şi (ii) $x+1 < 0$ $(x < -1)$, când inecuaţia devine $-(x+1) \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -4$, cu soluţiile $S_2 = (-\infty,-1) \cap [-4,\infty) = [-4,-1)$, deci inecuaţia dată are soluţiile $S_1 \cup S_2 = [-1,2] \cup [-4,-1) = [-4,2]$. ***Metoda 2.*** Folosim echivalenţă $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \geq 0$. Inecuaţia se rescrie $-3 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x+1 \\ x+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4,2]$. ***Metoda 3.*** Folosim echivalenţa $|x| \leq b \Leftrightarrow x^2 \leq b^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall b \geq 0$. Inecuaţia se rescrie $(x+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 3^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$. Semnul trinomului de grad doi produce soluţia $x \in [-4,2]$.

2. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{0,1,2\}$; b) $\{0,2\}$; c) $\{-1,0,1\}$; d) $\{1,2,3\}$; e) $\{-2,0,1\}$; f) $\{1,2,4\}$.

   Soluţie. Dând factor comun x, ecuaţia se rescrie $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$. Dar $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}\} = \{1,2\}$, deci soluţiile ecuaţiei sunt $\{0,1,2\}$.

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie continuă. **(5 pct.)**

   a) $m = 2$; b) $m = \frac{1}{3}$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = -2$; e) $m = 4$; f) $m = -5$.

   Soluţie. Continuitatea funcţiei f în $x = 1$ revine la satisfacerea condiţiilor $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 1} (x^2 + m) = 1 + m = \lim\limits_{x \searrow 1} (2x+1) \Leftrightarrow m + 1 = m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

4. Dacă $E = \log_2 20 - \log_4 25$, atunci: **(5 pct.)**

   a) $E = 2$; b) $E = 4$; c) $E = 0$; d) $E = -2$; e) $E = 3$; f) $E = -3$.

   Soluţie. Folosind proprietăţile logaritmilor, în particular regula de schimbare de bază, obţinem: $E = \log_2 20 - \log_4 25 = \log_2(2^2 \cdot 5) - \frac{\log_2 5^2}{\log_2 2^2} = \log_2 2^2 + \log_2 5 - \frac{2\log_2 5}{2} = 2 + \log_2 5 - \log_2 5 = 2$, deci $E = 2$.

5. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2x+1} + 2x = 5$. **(5 pct.)**

   a) $x = 11$; b) $x \in \{\frac{3}{2}, 4\}$; c) $x = 4$; d) $x = \frac{3}{2}$; e) $x = \frac{1}{6}$; f) $x = 15$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Ecuaţia se rescrie $\sqrt{2x+1} = 5 - 2x$ (*). Condiţia de existenţă a radicalului este $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. Membrul stâng fiind nenegativ, rezultă că şi cel drept are aceeaşi proprietate, deci $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$. Prin urmare avem condiţia $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Ridicând la pătrat ecuaţia (*) şi apoi împărţind-o la 2, obţinem

   $$2x + 1 = (5-2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4}\right\} = \left\{\frac{11 \pm 5}{4}\right\},$$

   deci $x \in \{\frac{3}{2}, 4\}$. Dar $4 \notin [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, deci nu convine ca soluţie, spre deosebire de $\frac{3}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Răspuns corect $x = \frac{3}{2}$. ***Metoda 2.*** Condiţia de existenţă a radicalului este (ca mai sus) $x \geq -\frac{1}{2}$. Rezolvarea ecuaţiei prin ridicare la pătrat conduce la $x \in \{\frac{3}{2}, 4\}$. Dar ecuaţia *din enunţ* este satisfăcută doar de $x = \frac{3}{2}$, unica soluţie a ecuaţiei.

6. Să se rezolve ecuaţia $5^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt{5}$. **(5 pct.)**

   a) $x = -1$; b) $x = 1$; c) $x = -3$; d) $x = 0$; e) $x = 4$; f) $x = 2$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $5^{\frac{x+1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}}$. Aplicăm ambilor membri ai ecuaţiei funcţia logaritmică de bază 5 (inversa funcţiei exponenţiale de bază 5) şi obţinem $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

7. Într-o progresie geometrică de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 3$ şi $a_4 = 12$. Să se calculeze a_3. **(5 pct.)**

   a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 8; d) 9; e) 4; f) 6.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Notăm termenii progresisi geometrice cu $a_1, a_2, \ldots$; termenii fiind pozitivi, rezultă că şi raţia progresiei, $r = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ $(k \geq 1)$ este de asemenea strict pozitivă. Folosind formula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ rezultă $\frac{a_4}{a_2} = r^2$, deci $r^2 = \frac{12}{3} = 4$, deci $r \in \{\pm 2\}$. Dar $r > 0$, deci $r = 2$. Atunci $a_3 = a_2 \cdot r = 3 \cdot 2 = 6$. ***Metoda 2.*** Folosind pozitivitatea termenilor progresiei şi relaţia $a_3^2 = a_2 a_4$, rezultă $a_3 = \sqrt{a_2 a_4} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$.

8. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{2x}$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**

   a) -1; b) $\frac{1}{2}$; c) 4; d) $-\frac{3}{2}$; e) 3; f) -2.

   Soluţie. $f'(x) = 1 + 2e^{2x}$, deci $f'(0) = 1 + 2e^{2\cdot 0} = 3$.

9. Să se calculeze $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$. **(5 pct.)**

   a) $E = 3$; b) $E = 8$; c) $E = 11$; d) $E = 14$; e) $E = 10$; f) $E = 16$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosim formula $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ $(m, n \geq 0,\ m \geq n)$ şi obţinem $C_3^0 = \frac{3!}{3!0!} = 1$, $C_3^1 = \frac{3!}{2!1!} = 3$, $C_3^2 = \frac{3!}{1!2!} = 3$, $C_3^3 = \frac{3!}{0!3!} = 1$, deci $E = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$. ***Metoda 2.*** Folosim binomul lui Newton, $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + c_3^2 ab^2 + c_3^3 b^3$ pentru $a = b = 1$. Obţinem $(1+1)^3 = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = E$, deci $8 = E$. Răspuns corect: $E = 8$. ***Metoda 3.*** Folosim formulele $C_m^k = C_m^{m-k}$ pentru $m = 3$ şi $k \in \{0, 1\}$, deci $C_3^0 = C_3^3$ şi $C_3^1 = C_3^2$. De asemenea, folosim $C_m^0 = 1$, $C_m^1 = m$, deci $C_3^0 = 1$ şi respectiv $C_3^1 = 3$. Atunci $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2(C_3^0 + C_3^1) = 2(1 + 3) = 8$.

10. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$. **(5 pct.)**

    a) 1; b) 2; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$.

    Soluţie. ***Metoda 1.*** Amplificăm fracţia cu conjugata numitorului: $z = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$. Folosind formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, rezultă $|z| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. ***Metoda 2.*** Folosim formula $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, rezultă $|z| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

11. Fie sistemul $\begin{cases} x - 2y = m \\ 2x + y = n \end{cases}$. Să se determine numerele reale m şi n astfel încât $x = 2$, $y = 1$ să fie soluţie a sistemului. **(5 pct.)**

    a) $m = 2, n = 1$; b) $m = 0, n = 5$; c) $m = 1, n = 4$; d) $m = -1, n = 3$; e) $m = 3, n = 1$; f) $m = 4, n = 3$.

    Soluţie. Înlocuind valorile $x = 2$ şi $y = 1$ în sistem, rezultă $\begin{cases} 2 - 2 \cdot 1 = m \\ 2 \cdot 2 + 1 = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 5. \end{cases}$

12. Să se rezolve inecuaţia $3x - 1 \geq 2x$. **(5 pct.)**

    a) $x \geq 1$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \geq 5$; d) $x \in [-1, 0]$; e) $x \leq \frac{1}{5}$; f) $x \leq \frac{1}{3}$.

    Soluţie. $3x - 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \geq 1$.

13. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 x^{2015} \ln x \, dx$. **(5 pct.)**

    a) $-\infty$; b) $-\frac{1}{2016^2}$; c) $-\frac{1}{2015}$; d) $-\frac{1}{2014}$; e) $-\frac{1}{2015^2}$; f) 0.

    Soluţie. Notăm $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 x^{2015} \ln x \, dx$. Calculăm I_ε integrând prin părţi:

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right)' \ln x \, dx = \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right) \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2016}}{2016} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right) \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2016} \int_\varepsilon^1 x^{2015} \, dx$$

deci

$$I_\varepsilon = \left(\frac{x^{2016}}{2016} \ln x - \frac{1}{2016^2} x^{2016}\right)\Big|_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2016} \varepsilon^{2016} \ln \varepsilon - \frac{1}{2016^2}(1 - \varepsilon^{2016}).$$

Atunci, folosind proprietatea $\lim\limits_{a\searrow 0} a^n \ln a = 0$ (demonstrabilă cu regula lui l'Hospital), obţinem

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \left[-\frac{1}{2016} \varepsilon^{2016} \ln \varepsilon - \frac{1}{2016^2}(1 - \varepsilon^{2016})\right] = 0 - \frac{1}{2016^2} + 0 = -\frac{1}{2016^2}.$$

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă. **(5 pct.)**

a) $m \neq -\frac{1}{3}$; b) $m \neq 0$; c) $m \neq \frac{1}{2}$; d) $m \neq 1$; e) $m \neq -\frac{1}{4}$; f) $m \neq \frac{1}{4}$.

Soluţie. Matricea A este inversabilă doar dacă deterinantul matricei este nenul. Cu ajutorul regulii Sarrus (de exemplu, sau dezvoltând după ultima linie), calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m$. Atunci $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

15. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{e}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

Soluţie. Prin derivare, obţinem: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$. Atunci (ţinănd cont că $x > 0$), $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Examinând semnul polinoamelor care formează fracţia $f'(x)$, se observă că:

* $f'(x) < 0$ (deci f este descrescătoare) pentru $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

* $f'(x) > 0$ (deci f este crescătoare) pentru $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.

Prin urmare $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ este punct de minim pentru f.

16. Să se calculeze $\int_0^1 (x^3 + x)dx$. **(5 pct.)**

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{4}{5}$.

Soluţie. Folosind formula Leibnitz-Newton şi $\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, $\forall a > -1$, rezultă $\int_0^1 (x^3 + x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - (0 + 0) = \frac{3}{4}$.

17. Câte soluţii reale are ecuaţia $|||x - 1| - 1| - 1| = 1$? **(5 pct.)**

a) o infinitate; b) cinci; c) patru; d) şase; e) trei; f) două.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosim $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ şi $|a| = b \Leftrightarrow a \in \{\pm b\}$. Obţinem succesiv: $|||x-1|-1|-1| = 1 \Leftrightarrow ||x-1|-1|-1 \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow ||x-1|-1| \in \{0, 2\} \Leftrightarrow |x-1|-1 \in \{0, \pm 2\} \Leftrightarrow |x-1| \in \{1, -1, 3\} \cap [0, \infty) = \{1, 3\} \Leftrightarrow x - 1 \in = \{\pm 1, \pm 3\} \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Răspuns corect: 4. ***Metoda 2.*** Folosim $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ şi $|a| = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$, $\forall a \in \mathbb{R}, b \geq 0$. Obţinem succesiv: $|||x - 1| - 1| - 1| = 1 \Leftrightarrow (\underbrace{||x - 1| - 1|}_{y} - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow ||x-1|-1| \cdot (||x-1|-1|-2)) = 0 \Leftrightarrow \{|x-1|-1 = 0$ sau $||x-1|-1| = 2\} \Leftrightarrow \{|x-1| = 1$ sau $(\underbrace{|x - 1|}_{z} - 1)^2 = 4\} \Leftrightarrow \{(x-1)^2 = 1$ sau $z^2 - z - 3 = 0\} \Leftrightarrow \{x^2 - 2x = 0$ sau $(z+1)(z-3) = 0\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $|x - 1| = -1$ sau $|x - 1| = 3\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $x \in \emptyset$ sau $(x - 1)^2 = 9\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $x^2 - 2x - 8 = 0\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $x \in \{-2, 4\}\} \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Răspuns corect: 4. ***Metoda 3.*** Explicităm succesiv modulele, pe subcazuri şi folosim $|-a| = |a|$:

1. $x \geq 1 \Rightarrow ||x - 1 - 1| - 1| = 1 \Leftrightarrow ||x - 2| - 1| = 1$; subcazuri:

1.1. $x \geq 2 \Rightarrow |x - 2 - 1| = 1 \Leftrightarrow |x - 3| = 1$; subcazuri:

1.1.1. $x \geq 3 \Rightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{4}$ (satisface condiţiile subcazului);

1.1.2. $x < 3 \Rightarrow 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{2}$ (satisface condiţiile subcazului);

1.2. $x < 2 \Rightarrow |2 - x - 1| = 1 \Leftrightarrow |1 - x| = 1 \Leftrightarrow |x - 1| = 1$; dar $x \geq 1$, deci $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, nu convine (contradicţie cu $x < 2$);

2. $x < 1 \Rightarrow ||1 - x - 1| - 1| = 1 \Leftrightarrow ||-x| - 1| = 1 \Leftrightarrow ||x| - 1| = 1$; subcazuri:

2.1. $x \geq 0 \Rightarrow |x - 1| = 1$; dar $x < 1$, deci $1 - x = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ (satisface condiţiile subcazului);

2.2. $x < 0 \Rightarrow |-x - 1| = 1 \Leftrightarrow |x + 1| = 1$; subcazuri:

2.2.1. $x \geq -1 \Rightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (aceeeaşi soluţie ca la subcazul 2.1.);

2.2.2. $x < -1 \Rightarrow -x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{-2}$ (satisface condiţiile subcazului).

În concluzie, reunind soluţiile, obţinem $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Răspuns corect: 4.

18. Fie polinomul $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$, unde $n \geq 3$ este număr natural, iar $m \in \mathbb{C}$. Să se determine m astfel încât f să fie divizibil cu $X^2 + X + 1$. **(5 pct.)**

a) $m = -2$; b) $m = 2i$; c) $m = 18$; d) $m = 2$; e) $m = 4$; f) $m = -2i$.

Soluţie. Rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$ sunt $\{\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \bar{\omega} = \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\} \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, rădăcinile complexe ne-reale ale ecuaţiei $X^3 - 1 = 0$. Asadar avem $\omega^3 = 1$ şi $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Divizibilitatea din concluzia problemei este echivalentă cu $f(\omega) = f(\bar{\omega}) = 0$. Folosind proprietăţile rădăcinilor ω şi $\bar{\omega} = \omega^2$, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega(\omega+1)^{2n+1} + (m-1)\omega^n = \omega(-\omega^2)^{2n+1} + (m-1)\omega^n = -\omega(\omega)^{4n+2} + (m-1)\omega^n \\ &= -\omega^{4n+3} + (m-1)\omega^n = -\omega^n + (m-1)\omega^n = \omega^n(-1+m-1) = \omega^n(m-2), \\ f(\bar{\omega}) &= \omega^{2n}(\bar{m}-2). \end{aligned}$$

Însă $\omega^k \in \{1, \omega, \omega^2\} \not\ni 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$, deci $\begin{cases} f(\omega) = 0 \\ f(\bar{\omega}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = 0 \\ \bar{m}-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$