Clasa a IV-a
Barem

(P1) pas 3 48 48 48 .... (1p)
pas 2 24 24 96 .... (2p)
pas 1 12 84 48 .... (2p)
inițial 78 42 24 .... (2p)

(P3) În urmă cu 4 ani, suma vârstelor era 28 ani (1p)
Reprezentare grafică, $28 : 7 = 4$; $4 \times 3 + 4 = 16$ ani (Dana în prezent) (2p)
$4 \times 4 + 4 = 20$ ani (Oana în prezent. (1p)
Mama are 40 ani R: După patru ani (3p)

(P2) $1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c + 10a + b + a = 2012$ (1p)
$\Rightarrow 1111a + 111b + 11c + d = 2012$ .... (1p)
Obs $1111a < 2012 \Rightarrow a = 1$ .... (1p)
Pt. $a = 1 \Rightarrow 111b + 11c + d = 901 \Rightarrow 793 \le 111b \le 901$ ... (2p)
$\Rightarrow b = 8$ și $11c + d = 13 \Rightarrow c = 1, d = 2$ ... (2p)

(P4) a) Luna februarie 2016 a avut 29 zile ... (1p)
$S = 3(1 + 2 + \dots + 29) = 3 \cdot 29 \cdot 30 : 2 = 1305$ ... (2p)
$1549 + 219 - 1305 = 463$ .... (1p)
b) $\overline{4ab5} = 55 \cdot \overline{ab}$ (1p) $\Rightarrow 4005 = 45 \cdot \overline{ab}$ (1p), $\overline{ab} = 89$ 1p

$\Rightarrow$ cifrul: 4895

Clasa a V-a
Barem

P1 3p a) $1=1^2$; $9=(1+2)^2$; $36=(1+2+3)^2$; $100=(1+2+3+4)^2$;
$225=(1+2+3+4+5)^2$
=> Nr-le scrise de Alexandra sunt:
2p $(1+2+\dots+7)^2=784$ și $(1+2+\dots+9)^2=45^2=2025$
1p b) Al 100-lea număr este spus de Cris și este $(1+2+\dots+100)^2=5050^2$
1p c) Obs: $(1+2+\dots+9)^2=45^2=2025$ => Dif min $=2025-2016=9$

P2 a) $n=1657+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot a$
1p $n=b^{2c}=(b^c)^2$ => n p.perf.
Obs 1p dacă $a\geq5$ => $u(n)=7$ => n nu e p.perf. $b=41$
1p dacă $a=4$, $n=1657+24=1681=41^2$ $c=1$
1p dacă $a=3$ => $u(n)=3$ => n nu e p.perf.
1p dacă $a=2$ => $n=1659$ nu convine
1p dacă $a=1$ => $n=1658$ nu convine
=> $(a,b,c)=(4,41,1)$ 1p

P3 $n=289\cdot k$
Suma a tuturor numerelor este: $1+2+\dots+289k=\frac{289k(289k+1)}{2}$
Suma numerelor șterse este: $289\cdot1+289\cdot2+\dots+289\cdot k=\frac{289(k+1)k}{2}$ =>
Suma numerelor rămase pe tablă este: $\frac{289k}{2}[289k+1-k-1]=\frac{289k\cdot288k}{2}$
Suma lor este: $(12\cdot17\cdot k)^2$ p.perfect.

P4 Dacă ar fi pătratul unui număr natural A^2+4A+2 ar trebui să fie p.perfect.
cum $n+1$ și n au parități diferite => A-impar deci
$A=4k+1$ sau $A=4k+3$
2p • Pentru $A=4k+1$ => $A^2+4A+2=M_4+3$ (nu e p.perf)
2p • Pentru $A=4k+3$ => $A^2+4A+2=M_4+3$ (—"—)

Clasa a VI-a

Barem

(P1) (1p) Pentru $p=3$ avem numerele $5, 13, 29, 37$ și 7, care sunt toate prime

(1p) Pentru $p=5$ numărul $p^4-2=623 \vdots 7$ ...

(1p) Pentru $p>5$, număr prim, vom arăta că nu toate cele patru

(1p) numere sunt prime

(1p) Dacă $p=5k+1 \Rightarrow p^2+4=(5k+1)^2+4=M_5+1+4=M_5$ (nu e prim)

(1p) Dacă $p=5k+2 \Rightarrow p^3+2=(5k+2)^3+2=M_5+8+2=M_5$ (-||-)

(1p) Dacă $p=5k+3 \Rightarrow p+2=5k+3+2=M_5$ (-||-)

(1p) Dacă $p=5k+4 \Rightarrow p^2+4=\dots=M_5$

(P2) $\{m(\hat{A}); m(\hat{B}); m(\hat{C})\}$ d.p. $\{30, 10, 5\}$ $\Rightarrow$ $m(\hat{A})=120^\circ$ (1p) + $m(\hat{B})=40^\circ$, $m(\hat{C})=20^\circ$ (1p)

Luăm un punct $D \in (BC)$ astfel încât $(CD) \equiv (CA)$ (1)

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CDA}) = 80^\circ$ (2p)

$\Rightarrow \triangle ADC$ isoscel cu $m(\widehat{CAD})$ ... $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{CAD}) = 40^\circ \Rightarrow$

În $\triangle BAD$, $m(\widehat{BAD}) = m(\hat{B})$ (2) (1p)

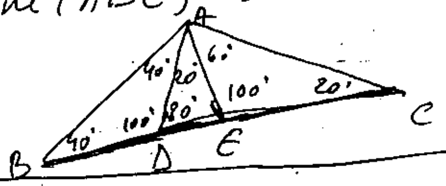
$\Rightarrow \triangle BAD$ is. cu $(BD) \equiv (AD)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} BD = BC - DC = BC - CA = 12$ (3) (1p)

$\overset{(2)(3)}{\Rightarrow} AD = 12$ (4)

În $\triangle AED$, $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ADE}) = 80^\circ \Rightarrow \triangle ADE$ isoscel (1p)

cu $(AD) \equiv (AE)$ (5)



$\overset{(4)(5)}{\Longrightarrow} AE = 12.$ (1p)

(P3) a) $x \cdot y = (x,y) \cdot [x,y]$ $\quad x+y=[x,y]-n\cdot(x,y)$ (1p)

$\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{[x,y]-n(x,y)}{xy} \Rightarrow$

Fie $d=(x,y) \Rightarrow x=dk_1;\ y=dk_2;\ (k_1,k_2)=1;\ k_1,k_2 \in \mathbb{N}^*$ $\quad k_1+k_2=k_1k_2-n$ (1p)

$\Rightarrow dk_1+dk_2 = dk_1k_2 - nd \ |:d \Rightarrow$ $\quad k_1$ impar sau k_2 impar

$\Leftrightarrow (k_1-1)(k_2-1)=n+1$; $\quad n+1$ par $\Rightarrow n$ impar (2p)

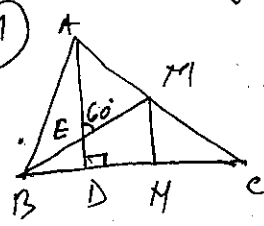
$\Rightarrow k_1-1$ par sau k_2-1 par. --- (1p)

b) $(k_1-1)(k_2-1)=2016 \Rightarrow (k_1-1)(k_2-1)=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ --- (1p)

pt. $k_1-1=2^5$ $(k_1=33) \Rightarrow k_2=64$; $d=1$ --- (3p)

$\Rightarrow x=33;\ y=64$

(P4) Fie $AD \cap BM = \{E\}$, $N \in (BC)$ a.î. $MN \parallel AD$ $\Rightarrow m(\widehat{EBD})=30^\circ$ --- În $\triangle MNB$ $m(\hat{N})=90^\circ$ și $m(\hat{B})=30^\circ$



$\Rightarrow MN \perp BC$ $(AD \perp BC) \Rightarrow$ (2p)

$\Rightarrow BM = 2MN$

MN lin. mij. în $\triangle CAD \Rightarrow AD = 2MN$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow [AD] \equiv [BM]$ --- (2p)

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că: Barem VIII P1

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}+\frac{1}{17\sqrt{66}}+\frac{1}{27\sqrt{176}}+\dots+\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{n}{2(5n+1)}$$

Soluție

Din inegalitatea mediilor $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, obținem: $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ și

atunci $\frac{1}{(a+b)\sqrt{ab}}\leq\frac{1}{2ab}$ (1) Pentru $a=5k-4$ și $b=5k+1$, ($k\in\mathbb{N}$, k

relația (1) devine: $\frac{1}{[(5k-4)+(5k+1)]\sqrt{(5k-4)(5k+1)}}<\frac{1}{2(5k-4)(5k+1)}$ sau

$$\frac{1}{(10k-3)\sqrt{(5k-4)(5k+1)}}<\frac{1}{2(5k-4)(5k+1)} \quad (2)$$

(Nu avem egalitate în (2) deoarece $a\neq b$)

În (2), pentru $k=\overline{1,n}$ obținem:

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}<\frac{1}{2\cdot(1\cdot 6)}$$

$$\frac{1}{17\sqrt{66}}<\frac{1}{2\cdot(6\cdot 11)}$$

$$\frac{1}{27\sqrt{176}}<\frac{1}{2\cdot(11\cdot 16)}$$

$$- - - - - - -$$

$$\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{1}{2\cdot(5n-4)(5n+1)}$$

Adunând membru cu membru, obținem:

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}+\frac{1}{17\sqrt{66}}+\frac{1}{27\sqrt{176}}+\dots+\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 1\ldots}\right.$$

$$\left.+\dots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right) \text{ sau}$$

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}+\frac{1}{17\sqrt{66}}+\dots+\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)\frac{1}{5}\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\cdot\frac{1}{5}\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}+\frac{1}{17\sqrt{66}}+\frac{1}{27\sqrt{176}}+\dots+\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5n+1}\right)\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}+\frac{1}{17\sqrt{66}}+\dots+\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{n}{2(5n+1)}.$$

Baran

Clasa a VII-a

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ numere reale strict pozitive. Să se arate că dacă $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ atunci $\left\{\frac{x_1^2+1}{y_1}, \frac{x_2^2+1}{y_2}, \ldots, \frac{x_n^2+1}{y_n}\right\} \cap [2, \infty) \neq \Phi$.

Gheorghe Lobonț

Demonstrație:

Din $\frac{x_i^2+1}{x_i} \geq 2$, $\forall i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2+1)}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \geq 2^n$ $(*)$

Presupunem că $\left\{\frac{x_1^2+1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n^2+1}{y_n}\right\} \cap [2; +\infty) = \emptyset$

$\Rightarrow \frac{x_i^2+1}{y_i} < 2$, $\forall i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2+1)}{y_1 y_2\cdot\ldots\cdot y_n} < 2^n$

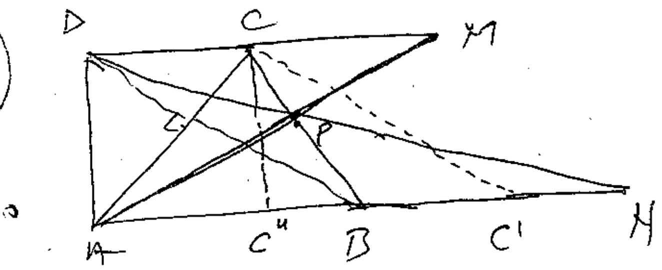
dar $y_1 y_2 \cdot\ldots\cdot y_n = x_1 x_2\cdot\ldots\cdot x_n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2+1)}{x_1 x_2\cdot\ldots\cdot x_n} < 2^n$ contradicție cu $(*)$

deci $\left\{\frac{x_1^2+1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n^2+1}{y_n}\right\} \cap [2, \infty) \neq \emptyset$.

cls a VII-a
Barem.

(P3)



Fie $CC' \parallel BD$ și $CC'' \perp BA$; $C', C'' \in AB$ (*)
$AC \perp BD$ $\Rightarrow AC \perp CC'$ (2p)

$\Rightarrow \Delta ACC'$ dreptunghic
$CC'' \perp AC'$ $\xrightarrow{\text{T. înălț.}}$ $CC''^2 = AC'' \cdot C''C'$ (1p)

$\Rightarrow AD^2 = CD \cdot AB$ (*)

Cum $AB \parallel CM \Rightarrow \frac{CM}{AB} = \frac{CP}{PB}$

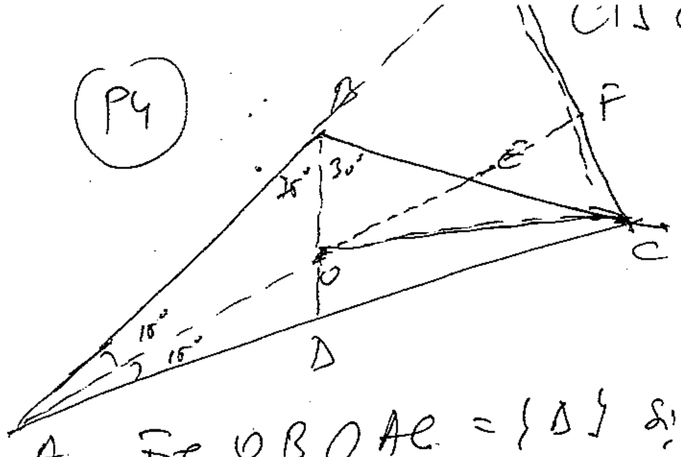
$BN \parallel CD \Rightarrow \frac{CP}{BP} = \frac{CD}{BN}$ $\Rightarrow$ (2p)

$\Rightarrow \frac{CM}{AB} = \frac{CD}{BN}$

$\Rightarrow CM \cdot BN = AB \cdot CD$ (**) (2p)

(*) (**) $\Rightarrow$ $AD^2 = BN \cdot CM$.

(P4) Barem



Fie $OB \cap AC = \{D\}$ și $OA \cap BC = \{E\}$

Fie G ai $m(\widehat{ACG}) = 90°$ și Teorem. $CG = a$ $\Rightarrow AG = 2a$ și $AC = a\sqrt{3}$ --- (2p)

$m(\widehat{BCA}) = 45°$, $m(\widehat{ACG}) = 90°$ $\Rightarrow m(\widehat{BCG}) = 45°$

$\Rightarrow$ În ΔGCA avem $[AF$ bis și $[CB$ bis $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{FG}{FC} = \dfrac{AG}{AC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ——— (1p)

$\Rightarrow FG = \dfrac{2a}{2+\sqrt{3}}$ și an. $BG = \dfrac{2a}{1+\sqrt{3}}$ (analog)

$\Rightarrow \dfrac{BG}{FG} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{GC}{BG}$ ---- (2p)

Deci $\Delta BFG \sim \Delta CBG$

$\Rightarrow m(\widehat{FBG}) = 45°$ și $m(\widehat{BFG}) = 75°$

$\Rightarrow m(\widehat{EFB}) = 30°$

Obs ΔADB și ΔDFB isoscele

$\Rightarrow m(\widehat{DFO}) = m(\widehat{EFB}) = 30°$.

În $CDOF$ avem: $m(\widehat{DOF}) = m(\widehat{DCF}) = 90°$

$\Rightarrow m(\widehat{DCO}) = m(\widehat{DFO}) = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{OCB}) = 15°$ ---- (2p)

Dacă a, b, c, d sunt numere reale cu produsul egal cu 1 și $1+a+ab+abc \neq 0$, să se arate că: a VIII-a Barău

P1

1) $1+b+bc+bcd \neq 0$, $1+c+cd+cda \neq 0$, $1+d+da+dab \neq 0$

2) $\dfrac{1}{1+a+ab+abc} + \dfrac{1}{1+b+bc+bcd} + \dfrac{1}{1+c+cd+cda} + \dfrac{1}{1+d+da+dab} =$

3) $\dfrac{2016+a}{1+a+ab+abc} + \dfrac{2016+b}{1+b+bc+bcd} + \dfrac{2016+c}{1+c+cd+cda} + \dfrac{2016+d}{1+d+da+dab} = 2$

Soluție

1) Din $abcd = 1 \Rightarrow a, b, c, d \neq 0$ și $d = \dfrac{1}{abc}$. Atunci (1p)

$1+b+bc+bcd = 1+b+bc+bc\cdot\dfrac{1}{abc} = 1+b+bc+\dfrac{1}{a} = \dfrac{1+a+ab+abc}{a}$ (1)

Din ipoteză $1+a+ab+abc \neq 0$ și atunci $1+b+bc+bcd \neq 0$ (1p)

Analog $1+c+cd+cda = 1+c+c\cdot\dfrac{1}{abc} + ca\cdot\dfrac{1}{abc} = 1+c+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{1+a+ab+abc}{ab}$ (2)

$\neq 0.$ (1p)

și $1+d+da+dab = 1+\dfrac{1}{abc} + \dfrac{1}{abc}\cdot a + \dfrac{1}{abc}\cdot ab = 1+\dfrac{1}{abc}+\dfrac{a}{abc}+\dfrac{ab}{abc} =$

$= \dfrac{abc+ab+a+1}{abc} \neq 0$ (3) (1p)

2) Cu relațiile (1), (2), (3), obținem:

$\dfrac{1}{1+a+ab+abc} + \dfrac{1}{1+b+bc+bcd} + \dfrac{1}{1+c+cd+cda} + \dfrac{1}{1+d+da+dab} =$ (1p)

$\dfrac{1}{1+a+ab+abc} + \dfrac{a}{1+a+ab+abc} + \dfrac{ab}{1+a+ab+abc} + \dfrac{abc}{1+a+ab+abc} = \dfrac{1+a+ab+abc}{1+a+ab+abc}$

$= 1$

3) Cu (1), (2), (3) obținem:

$\dfrac{2016+a}{1+a+ab+abc} + \dfrac{2016+b}{1+b+bc+bcd} + \dfrac{2016+c}{1+c+cd+cda} + \dfrac{2016+d}{1+d+da+dab} =$

$= \dfrac{2016+a}{1+a+ab+abc} + \dfrac{a(2016+b)}{1+a+ab+abc} + \dfrac{ab(2016+c)}{1+a+ab+abc} + \dfrac{abc(2016+d)}{1+a+ab+abc} =$ (2

$= \dfrac{2016(1+a+ab+abc)+(a+ab+abc+abcd)}{1+a+ab+abc} = \dfrac{2016(1+a+ab+abc)}{1+a+ab+abc} +$

$+ \dfrac{a+ab+abc+1}{1+a+ab+abc} = 2016+1 = 2017.$

P2. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Arătați că

edsa VII-a Barrau

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \le \frac{3}{2}\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Soluție: După împărțirea cu $\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$ inegalitatea devine

$$\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(x+1)(y+1)}} + \sqrt{\frac{z}{(y+1)(z+1)}} \le \frac{3}{2}$$ 2p

din inegalitatea dintre ma și mg $\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$ 1

$$\sqrt{\frac{y}{(x+1)(y+1)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+1} + \frac{1}{x+1}\right)$$ 1

$$\sqrt{\frac{z}{(y+1)(z+1)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1} + \frac{1}{y+1}\right)$$ 1

---

adunând relațiile 2p

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(x+1)(y+1)}} + \sqrt{\frac{z}{(y+1)(z+1)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

P3 VIII

Barem

$DA^2+MB^2=DB^2+MA^2 \Leftrightarrow$

$DA^2-DB^2=MA^2-MB^2$ (1p)

în ΔDAB ducem $DP\perp AB$ și $MN\perp AB$ cu $P,N\in(AB)$. Aplicând teorema lui Pitagora în Δ dreptunghice $\Delta PAD, \Delta PBD, \Delta NAM$ și NBM obținem $DA^2=DP^2+AP^2$, $DB^2=DP^2+BP^2$, $MA^2=MN^2+AN^2$, $MB^2=MN^2+NB^2$ (3p)

$\Rightarrow DA^2-DB^2=AP^2-BP^2=AB(AP-PB)$ și $MA^2-MB^2=AN^2-BN^2=AB(AN-BN)$

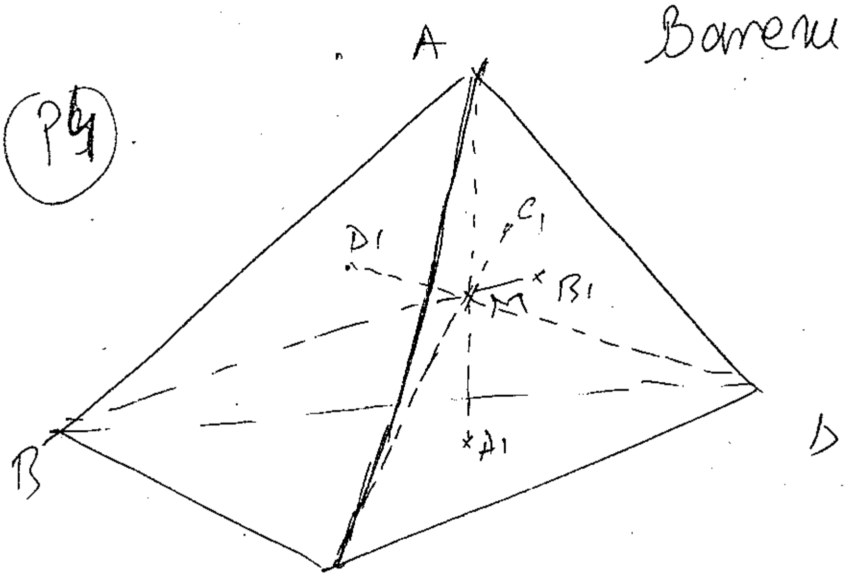
Egalând cele 2 relații obținem $AP-BP=AN-BN \Rightarrow AB-2BP=AB-2BN$ (1p)

$\Rightarrow BP=BN \Rightarrow N=P \Rightarrow D,M,N$ puncte coliniare $\Rightarrow DM\perp AB$ (1p)

Cum $MC\perp AB \Rightarrow AB\perp(DMC) \Rightarrow AB\perp CD$ (1p) clasa a VIII-a

Barem.

(P4)



"$\Leftarrow$" pp. $\frac{MA_1}{MA}=\frac{MB_1}{MB}=\frac{MC_1}{MC}=\frac{MD_1}{MD}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MA_1}{MA}+\frac{MB_1}{MB}+\frac{MC_1}{MC}+\frac{MD_1}{MD}=\frac{4}{3}$ --- (1p)

"$\Rightarrow$" Notăm: $V_A = V_{MBCD}$; $V_B = V_{MACD}$; $V_C = V_{MABD}$

și $V_D = V_{MABC}$.

Avem: $\frac{MA_1}{MA}=\frac{MA_1}{AA_1-MA_1}=\frac{V_A}{V-V_A}=\frac{V}{V-V_A}-1$

Analog avem: $\frac{MB_1}{MB}=\frac{V}{V-V_B}-1$; ... ; $\frac{MD_1}{MD}=\frac{V}{V-V_D}-1$ --- (1p)

$V_A+V_B+V_C+V_D=V$ (1p)

$\frac{4}{3}=\frac{V_A}{V-V_A}+\frac{V_B}{V-V_B}+\frac{V_C}{V-V_C}+\frac{V_D}{V-V_D}$ ---

$\frac{16}{3}=\frac{V}{V-V_A}+\frac{V}{V-V_B}+\frac{V}{V-V_C}+\frac{V}{V-V_D}\geq\frac{16}{\frac{V-V_A}{V}+\frac{V-V_B}{V}+\frac{V-V_C}{V}+\frac{V-V_C}{V}}=$

$=\frac{16V}{4V-(V_A+V_B+V_C+V_D)}=\frac{16}{3}$ --- (2p)

Se impune acum condiția: $\frac{V}{V-V_A}=\frac{V}{V-V_B}=\frac{V}{V-V_C}=\frac{V}{V-V_D}$

$\Rightarrow V_A=V_B=V_C=V_D=\frac{V}{4}$ și $\frac{MA_1}{MA}=\frac{MB_1}{MB}=\frac{MC_1}{MC}=\frac{MD_1}{MD}$ --- (2p)

CLASA IX

PROBLEMA 1

1p) pas 1 Scăzând din primul membru pe cel de-al treilea, obținem

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{b^2-c^2}{b+c}+\frac{c^2-a^2}{c+a} = (a-b)+(b-c)+(c-a)=0.$$

Deci cei doi membrii sunt egali $\Longrightarrow$

toate cele 3 expresii sunt egale.

3p) pas 2 Scădem din primul membru pe al doilea.

$$\frac{a^2-c^2}{a+b}+\frac{b^2-a^2}{b+c}+\frac{c^2-a^2}{c+a} = \frac{a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2-a^4-b^4-c^4}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= -\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = 0 \Longrightarrow a=b=c$$ 1p

Total 7 puncte

Clasa a IX-a

Problema 2 — Soluție

Dacă $H_1=\{1\}$, $H_2=\{2\}$ și $H_3=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, atunci

$$S(H_1)\cdot S(H_2)\cdot S(H_3)=84$$

Vom demonstra că valoarea minimă a produsului este 84. Dacă fiecare factor al produsului $S(H_1)\cdot S(H_2)\cdot S(H_3)$ este cel puțin 5, atunci valoarea produsului este mai mare decât 125, deci este suficient să demonstrăm că produsul este cel puțin 84 și în cazul în care unul dintre cei trei factori este cel mult 4. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că acest factor este $S(H_1)$.

(1p) Pe de altă parte $X\subseteq H$ și $S(X)\leq 4$ se realizează doar în cazurile $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{3\}$, $X=\{4\}$ și $X=\{1,2\}$.

În aceste cazuri folosim următoarea proprietate:

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, deci dacă $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a+b=c$ constant, atunci ab este minim în cazul în care $|a-b|$ ia valoarea cea mai mare posibilă.

(1p) Dacă $H_1=\{1\}$, atunci $S(H_1)+S(H_2)=44$ și $S(H_2)\geq 2$, $S(H_3)\geq 2$ deci valoarea minimă se realizează pentru $S(H_2)=2$ și $S(H_3)=42$ (sau invers), deci H_1, H_2, H_3 este soluție.

(1p) Dacă $H_1=\{2\}$, atunci $S(H_2)+S(H_3)=43$ și $S(H_2)\geq 1$, $S(H_3)\geq 2$, deci valoarea minimă se realizează pentru $S(H_2)=1$ și $S(H_3)=42$, (sau invers), deci H_1, H_2, H_3 soluție.

(1p) Dacă $H_1=\{3\}$, atunci $S(H_2)+S(H_3)=42$ și $S(H_2)\geq 1$, $S(H_3)\geq 1$, deci valoarea minimă se realizează pentru $S(H_2)=1$ și $S(H_3)=41$ (sau invers). În acest caz însă produsul obținut $1\cdot 3\cdot 41>84$.

(1p) Dacă $H_1=\{4\}$, atunci $S(H_2)+S(H_3)=41$ și $S(H_2)\geq 1$, $S(H_3)\geq 1$, deci valoarea minimă se realizează pentru $S(H_2)=1$ și $S(H_3)=40$ (sau invers). În acest caz $1\cdot 4\cdot 40>84$.

(1p) Dacă $H_1=\{1,2\}$, atunci $S(H_2)+S(H_3)=42$ și $S(H_2)\geq 3$, $S(H_3)\geq 3$, deci valoarea minimă se realizează pentru $S(H_2)=3$ și $S(H_3)=39$ (sau invers). În acest caz produsul este $3\cdot 3\cdot 39>84$.

(1p) Dacă $H_1=\{1,3\}$, atunci $S(H_2)+S(H_3)=41$ și $S(H_2)\geq 2$, $S(H_3)\geq 4$. Deci valoarea minimă se realizează pentru $S(H_1)=4$, $S(H_2)=2$ și $S(H_3)=39$. Produsul va fi $4\cdot 2\cdot 39>84$.

În consecință produsul minim este 84 și se obține pentru submulțimile $\{1\}$, $\{2\}$ și $\{3,4,5,6,7,8,9\}$.

Total 7p.

Problema 3

Soluție.

(2p) $\overrightarrow{MH} = \dfrac{tg\,A \cdot \overrightarrow{MA} + tg\,B \cdot \overrightarrow{MB} + tg\,C \cdot \overrightarrow{MC}}{tg\,A + tg\,B + tg\,C}$

dar:

(1p) $tg\,A + tg\,B + tg\,C = tg\,A \cdot tg\,B \cdot tg\,C$

Rezultă: $tg\,A \cdot tg\,B \cdot tg\,C \cdot \overrightarrow{MH} = tg\,A \cdot \overrightarrow{MA} + tg\,B\,\overrightarrow{MB} + tg\,C \cdot \overrightarrow{MC}$ (1)

$\forall$ M din plan.

Din ipoteză avem:

$tg\,B \cdot \overrightarrow{MB} + tg\,C \cdot \overrightarrow{MC} = tg\,A \cdot \overrightarrow{MA}$ (2)

(2p) Din 1) și 2) rezultă

$\cancel{tg\,A} \cdot tg\,B \cdot tg\,C \cdot \overrightarrow{MH} = 2\,\cancel{tg\,A} \cdot \overrightarrow{MA}$

Deci $\overrightarrow{MA} = \dfrac{tg\,B \cdot tg\,C}{2} \cdot \overrightarrow{MH}$

Deci:

(1p) a) M, A, H coliniare

(1p) b) $\dfrac{MA}{MH} = \dfrac{tg\,B \cdot tg\,C}{2}$.

Total 7p

CLASA $\overline{\underline{IX}}$-a PROBLEMA 4

$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

obținem $\quad [b\sqrt{2}] = -2a - c$

$[b\sqrt{5}] = -5a - c$

(2p) $\quad [b\sqrt{8}] = -8a - c$

$\Longrightarrow \quad [b\sqrt{8}] + [b\sqrt{2}] = 2[b\sqrt{5}]$

Deducem

$b\sqrt{8} + b\sqrt{2} \geq 2(b\sqrt{5} - 1)$

(2p) și $2b\sqrt{5} > b\sqrt{8} - 1 + b\sqrt{2} - 1$

$\Longrightarrow \quad |2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}|\,|b| \leq 2$

(1p) $\Longrightarrow \quad |b| \leq \dfrac{2}{|2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}|} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} < 9$

$b \in \mathbb{Z}, \ |b| < 9$

Prin verificări rezultă că singurele valori ale lui b care ne dau a și c întregi, $a \neq 0$,

(1p) sunt $b = 4 \Longrightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$

(1p) și $b = -4 \Longrightarrow f(x) = (x-2)^2$

Total 7 puncte

clasa a $\overline{X}$-a

PROBLEMA 1

(1p) Fie $z = r(\cos t + i\sin t)$

$\bar{z} = r(\cos t - i\sin t)$

$z + \bar{z} = 2r\cos t$

(1p) $(z+\bar{z})^m = 2^m r^m \cos^m t$

. . . .

(2p) Deci $(z+\bar{z})^m + (z+\bar{z})^{m+1} + \dots + (z+\bar{z})^n =$

$= 2^m r^m \cos^m t + 2^{m+1} r^{m+1} \cos^{m+1} t + \dots + 2^n \cdot r^n \cos^n t \leq$

$\leq 2^m + 2^{m+1} + \dots + 2^n = 2016$

Se observă că

(2p) $2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 2016$

Deci $z = 1$

și

(1p) $m = 5$

$n = 10$

Total 7 p.

CLASA X

PROBLEMA 2

~~P~~ 1 *Să se rezolve, în mulţimea numerelor naturale, ecuaţia*

$$\log_a n = \log_{a_1} n + \log_{a_2} n + ... + \log_{a_p} n,$$

unde a, a_1, ..., a_p *sunt* $p+1$ *numere reale supraunitare care satisfac relaţia* $a^p \geq \max\{a_1, ..., a_p\}$.

Dorel I. Duca

R. 1: Evident ecuaţia are pe $n = 1$ ca soluţie. 1p Fie deci $n \geq 2$. Atunci din $a^p \geq a_k > 1$, $\forall k \in \{1, ..., p\}$ obţinem că

$$\log_{a_1} n + \log_{a_2} n + ... + \log_{a_p} n - \log_a n = \quad \text{1p}$$

$$= \frac{1}{\log_n a_1} + \frac{1}{\log_n a_2} + ... + \frac{1}{\log_n a_p} - \frac{1}{\log_n a} = \quad \text{1p}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\left(\frac{p}{\log_n a_1} - \frac{1}{\log_n a}\right) + \left(\frac{p}{\log_n a_2} - \frac{1}{\log_n a}\right) + ... + \left(\frac{p}{\log_n a_p} - \frac{1}{\log_n a}\right)\right\} = \quad \text{1p}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\frac{\log_n a^p - \log_n a_1}{(\log_n a)(\log_n a_1)} + \frac{\log_n a^p - \log_n a_2}{(\log_n a)(\log_n a_2)} + ... + \frac{\log_n a^p - \log_n a_p}{(\log_n a)(\log_n a_p)}\right\} \geq 0. \quad \text{1p}$$

Evident egalitatea cu zero având loc dacă şi numai dacă $\log_n a^p - \log_n a_k = 0$, $\forall k \in \{1, ..., p\}$. 1p Aşadar, dacă $a_1 = a_2 = ... = a_p = a^p$, ecuaţia are ca soluţie orice număr natural $n \geq 1$, altfel are ca soluţie numai pe $n = 1$. 1p

■

CLASA X

PROBLEMA 3

Avem $(1+x+x^2+\dots+x^n)(1+x+x^2+\dots+x^n) =$

$= 1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+Q(x)$, (1p)

unde $Q(x)$ este un polinom ce conține termenii care apar la puteri mai mari decât n.

Apoi $(1+x+x^2+\dots+x^n)^3 = (1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+Q(x))(1+x+x^2+\dots+x^n)$

și deci coeficientul lui x^n este

$$1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$ (1p)

Trebuie, deci să arătăm că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ să fie pătrat perfect. (1p)

Observăm că $n=7$ verifică și că, dacă (1p) numărul n verifică condiția, atunci și numărul $m = 4(n+1)(n+2)-1$ verifică condiția, căci (1p)

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} 4(2n+3)^2.$$ (1p)

Plecând de la soluția $n=7$, putem construi un șir infinit de soluții: (1p)

$7, 287, 332927, \dots$

CLASA a X-a PROBLEMA 4

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \dots, a_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Să se arate că

$$\log_{1-a_1}(1-na_2) + \log_{1-a_2}(1-na_3) + \dots + \log_{1-a_n}(1-na_1) \geq n^2.$$

TITU ANDREESCU

Soluţie: Pentru început demonstrăm următoarea

LEMA: Pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ are loc inegalitatea

$$\frac{\ln(1-nx)}{\ln(1-x)} \geq n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$ cu egalitate pentru $n=1$.

Demonstraţie: Avem

$$0 < 1-nx < 1-x < 1$$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ (1p)

şi prin urmare ($\ln(1-x) < 0$)

$$\ln(1-nx) \leq n\ln(1-x) \iff 1-nx \leq (1-x)^n$$ (adevărată cu egalitate pentru $\forall x \in (0,1)$ dacă $n=1$. Dacă este (1p) adevărată pentru $n \Rightarrow$

$$(1-x)^{n+1} \geq (1-x)(1-nx) = 1-(n+1)x + nx^2 > 1-(n+1)x$$

deci este adevărată şi pentru $n+1$ cu inegalitate strictă (1p)

şi lema este demonstrată.

Avem $\log_{1-a_1}(1-na_2) = \frac{\ln(1-na_2)}{\ln(1-a_1)}$ şi analog celelalte (1p)

situaţii $\Rightarrow$ (din inegalitatea mediilor)

$$\frac{\ln(1-na_2)}{\ln(1-a_1)} + \frac{\ln(1-na_3)}{\ln(1-a_2)} + \dots + \frac{\ln(1-na_1)}{\ln(1-a_n)} \geq n\sqrt[n]{\frac{\ln(1-na_2)}{\ln(1-a_1)} \cdot \frac{\ln(1-na_3)}{\ln(1-a_2)} \cdots \frac{\ln(1-na_1)}{\ln(1-a_n)}}$$ (1p)

şi prin urmare este suficient să demonstrăm că

$$\sqrt[n]{\frac{\ln(1-na_2)}{\ln(1-a_1)} \cdot \frac{\ln(1-na_3)}{\ln(1-a_2)} \cdots \frac{\ln(1-na_1)}{\ln(1-a_n)}} \geq n$$ iar aici se (1p)

foloseşte lema: $\frac{\ln(1-a_k \cdot n)}{\ln(1-a_k)} \geq n$, adică inegalitatea este

demonstrată. Egalitatea are loc pentru $n=1$. (1p)

CLASA XI

PROBLEMA 1

P 1 *Să se calculeze determinantul matricei* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, *unde*

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{dacă } i \neq j \\ 2, & \text{dacă } i = j \end{cases} \quad \text{cu } i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Vasile Berinde

R. 1: Avem

$$d_n = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & ... \\ -1 & 2 & -1 & 1 & ... \\ 1 & -1 & 2 & -1 & ... \\ -1 & 1 & -1 & 2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & -1 & 1 & -1 & ... \\ 0-1 & 2 & -1 & 1 & ... \\ 0+1 & -1 & 2 & -1 & ... \\ 0-1 & 1 & -1 & 2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} =$$

2p

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & ... \\ 0 & 2 & -1 & 1 & ... \\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... \\ 0 & 1 & -1 & 2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & ... \\ -1 & 2 & -1 & 1 & ... \\ +1 & -1 & 2 & -1 & ... \\ -1 & 1 & -1 & 2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}$$

2p

Înlocuind c_k cu $c_k + (-1)^k c_{k+1}$, $k \in \{2, 3, ..., n\}$ în al doilea determinant, obţinem 1p

$$d_n = d_{n-1} + 1, \ \forall n \geq 2.$$

1p

Rezultă că şirul este o progresie aritmetică cu raţia 1 şi $d_n = n + 1$, $\forall n \geq 2$. ∎ 1p

CLASA a XI-a PROBLEMA 2

P2 *Fie* $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ *o funcţie mărginită şi* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că există*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Dorel I. Duca

R. 1: Vom arăta că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}. \tag{1}$$

Fie $\varepsilon>0$. Din faptul că $L:=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}\in\mathbb{R}$, deducem că există un număr real $\delta>0$ cu proprietatea că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cu $|x|<\delta$ avem

$$L-\varepsilon<\frac{\varphi(x)}{x}<L+\varepsilon. \tag{2}$$

2p

Funcţia f fiind mărginită, există un număr natural n_0 cu proprietatea că oricare ar fi numărul natural $n\geq n_0$ avem

$$0<\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)<\delta,\ \text{oricare ar fi } k\in\{1,...,n\}.$$

2p

De aici şi din (2) obţinem

$$L-\varepsilon<\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}<L+\varepsilon,\ \text{oricare ar fi } n\geq n_0 \text{ şi } k\in\{1,...,n\},$$

1p

inegalităţi care, prin adunare, ne conduc la

$$L-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}<L+\varepsilon,\ \text{oricare ar fi } n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0..$$

2p

Aşadar (1) are loc. ■

cls XI

PROBLEMA 3

Soluție

Fie $\det(A) = d$. Prin ipoteză $d \neq 0$.

Înmulțim relația de la b) cu $\det A \Rightarrow$ (1p)

$$\underbrace{\det(A^* + BA^{-1})\det(A)}_{\substack{= \det(A^*A + BA^{-1}A) \\ = \det(dI_n + B)}} - \underbrace{\det(A)\det(A^* - A^{-1}B)}_{\substack{= \det(AA^* - AA^{-1}B) \\ = \det(dI_n - B)}} = 2\det(A)$$ (1p) (1p)

$$\Rightarrow \det(dI_n + B) + \det(B - dI_n) = 2d$$ (1p)

s-a folosit $\det(dI_n - B) = -\det(B - dI_n)$ căci n impar.

Fie $P = \det(B - XI_n)$ polinomul caracteristic lui B

Deoarece rang $B = 1 \Rightarrow P = -X^n + tr(B)X^{n-1}$ și (1p)

obținem $P(d) + P(-d) = 2d \Leftrightarrow$

$$-d^n + tr(B)d^{n-1} + d^n + tr(B)d^{n-1} = 2d \Leftrightarrow$$ (1p)

$$tr(B)d^{n-1} = d$$

$$tr(B)d^{n-2} = 1$$ (1p)

$tr(B), d \in \mathbb{Z}$ deci $tr(B) = d^{n-2} = \pm 1 \Leftrightarrow$ (1p)

$$d = tr(B) = \pm 1.$$

CLASA XI

PROBLEMA 4

Pentru $n=1$ obținem $f(x+1)=\dfrac{(x+1)f(x)}{x+(2x+1)f(x)}$ (1p)

Notând $f(1)=a>0$ deducem

$f(2)=\dfrac{2a}{1+3a}$, $f(3)=\dfrac{3a}{1+8a}$. (1p)

Prin inducție matematică se arată că

$$f(m)=\frac{ma}{1+(m^2-1)a}, \forall m\geq 1.$$ (1p)

Repetând procedeul obținem

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)a}{1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1\right)a}$$ (1p)

și în general, prin inducție,

$$f\left(1+\frac{m}{n}\right)=\frac{\left(1+\frac{m}{n}\right)a}{1+\left(\left(1+\frac{m}{n}\right)^2-1\right)a}, \forall m\geq n\geq 1$$ (1p)

Din continuitatea funcției f rezultă

$$f(x)=\frac{ax}{1+(x^2-1)a}, \forall x\geq 1.$$ (1p)

De de altă parte, funcția f de mai sus satisface relația dată. (1p)

CLASA XII

PROBLEMA 1

P 1 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{a^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{a^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right),$$

atunci când $a\in[2,+\infty)$.

Dorel I. Duca

R. 1: Evident

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{kn}},\ \forall n\geq 1.$$ 1p

Pe de altă parte, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $k\in\{1,...,n\}$, avem

$$a^{\frac{k-1}{n}}\leq\frac{a^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{kn}}\leq a^{\frac{k}{n}}. \qquad (*)$$

Într-adevăr, a doua inegalitate este evidentă. Cum prima inegalitate este echivalentă cu $a^{-\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{1+\frac{1}{kn}}$, adică cu inegalitatea $1+\frac{1}{kn}\leq a^{\frac{1}{n}}$, vom considera, pentru $k\in\mathbb{N}$ fixat, funcţia $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită pentru fiecare $x\in[0,1]$ prin $h(x)=a^x-1-\frac{x}{k}$. Cum derivata $h'(x)=a^x\ln a-\frac{1}{k}\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$, deducem că $h(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$ şi deci şi prima inegalitate din $(*)$ are loc 2p

Întrucât funcţia exponenţială este continuă, din $(*)$ deducem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ şi $k\in\{1,...,n\}$ există un punct $\xi_k^n\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ care are proprietatea că 1p

$$\frac{a^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{kn}}=a^{\xi_k^n}.$$

De aici deducem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, numărul $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{kn}}$ este suma Riemann ataşată funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=a^x$, $\forall x\in[0,1]$, diviziunii $\Delta=\left(0,\frac{1}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right)$ şi sistemului de puncte intermiare $\xi^n=(\xi_1^n,...,\xi_k^n)$. Întrucât funcţia f este continuă, şi deci integrabilă Riemann pe $[0,1]$, deducem că 2p

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\int_0^1 a^x\mathrm{d}x=\frac{a-1}{\ln a}.$$ 1p

■

CLASA a XII-a

SOLUŢIE

Problema 2

XII

P2

a) Dacă $f \in \mathrm{Hom}(C_m, A)$, atunci avem

$$mf(x) = f(x^m) = f(1) = 0,$$

deci $f(x) \in A[m]$. Putem considera aplicaţia

$$\phi\colon \mathrm{Hom}(C_m, A) \to A[m], \quad \phi(f) = f(x).$$

Observăm că

$$\phi(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \phi(f) + \phi(g),$$ (1p)

deci ϕ este morfism de grupuri. Presupunem că $\phi(f) = \phi(g)$. Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, avem

$$f(x^k) = kf(x) = kg(x) = g(x^k),$$

deci $f = g$ şi ϕ este funcţie injectivă. Fie acum $a \in A[m]$ şi definim

$$f\colon C_m \to A, \quad f(x^k) = ka.$$

Pentru a arăta că f este bine definită, presupunem că $l \in \mathbb{Z}$ şi $x^k = x^l$. Rezultă că există $g \in \mathbb{Z}$ astfel încât $l = k + qm$. Atunci

$$f(x^l) = la = ka + qma = ka = f(x^k).$$ (1p)

În sfârşit, pentru orice $k, l \in \mathbb{Z}$ avem

$$f(x^k x^l) = f(x^{k+l}) = (k+l)a = ka + la = f(x^k) + f(x^l),$$

deci $f \in \mathrm{Hom}(C_m, A)$ şi ϕ este aplicaţie surjectivă. (1p)

b) Amintim că dacă $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_l) \in S_n$ este un ciclu de lungime l, atunci $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ pentru $1 \leq k < l$ şi $\sigma(i_l) = i_1$, iar ordinul lui σ este l. Evident, aici $2 \leq l \leq n$ şi $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$. De exemplu, $(i\ j) = (j\ i) = (i\ j)^{-1}$.

Fie $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ distincte. Atunci se verifică uşor egalitatăţile:

$$(i\ j\ k) = (i\ k)(i\ j) = (i\ j)(i\ k)(i\ j)(i\ k).$$

Revenim la soluţie.

Pentru $n = 1$ şi $n = 2$, $S_n \simeq C_n$, deci afirmaţia rezultă din a). (1p)

Presupunem că $n \geq 3$. Dacă $f \in \mathrm{Hom}(S_n, A)$ şi $\tau \in S_n$ este o transpoziţie, atunci $2f(\tau) = f(\tau^2) = f(e) = 0$, deci $f(\tau) \in A[2]$. Rezultă că aplicaţia

$$\phi\colon \mathrm{Hom}(S_n, A) \to A[2],\ \phi(f) = f((1\ 2)),$$ (1p)

este bine definită şi este morfism de grupuri. Fie $f \in \mathrm{Hom}(S_n, A)$. Avem

$$f((i\ j\ k)) = f((i\ j)(i\ k)(i\ j)(i\ k)) = 2f((i\ j)) + 2f((i\ k)) = 0$$

şi pentru $n \geq 4$,

$$f((i\ k)(j\ l)) = f((i\ j\ k)) + f((i\ j\ l)) = 0.$$ (1p)

Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare pară, atunci σ este produsul unui număr par de transpoziţii şi , din cele de mai sus, vedem că $f(\sigma) = 0$. Fie $f((1\ 2)) = a$ şi fie $\tau \neq (1\ 2)$ o transpoziţie. Atunci $f((1\ 2)\tau) = a + f(\tau) = 0$, deci $f(\tau) = -a$. Deoarece $2a = 0$, rezultă că $f(\tau) = a$. Obţinem că $f(\sigma) = 0$ dacă σ este o permutare pară şi $f(\sigma) = a$ dacă σ este impară. De aici rezultă imediat că ϕ este funcţie injectivă. Dacă $a \in A[2]$ este un element arbitrar, atunci definim $f\colon S_n \to A$ ca mai înainte. Se vede că $f((1\ 2)) = a$ şi analizând cele patru cazuri care apar, obţinem că f este morfism de grupuri, deci ϕ este şi surjectivă. (1p)

CLASA $\overline{XII}$

PROBLEMA 3

$$J = \int_0^{1/2} \underbrace{\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}}_{\leq (1-x)^n} dx + \int_{1/2}^{1} \underbrace{\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}}_{\leq x^n} dx$$ 1p

$$\leq \int_0^{1/2} \sqrt[n]{2}\,(1-x)\,dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt[n]{2}\,x\,dx$$ 1p

$$= \sqrt[n]{2} \cdot \frac{3}{4}$$ 1p

$$J = \int_0^{1/2} \sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\,dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\,dx$$ 1p

$$\geq \int_0^{1/2} (1-x)\,dx + \int_{1/2}^{1} x\,dx = \frac{3}{4}$$ 1p

Deci

$$\frac{3}{4} \leq J \leq \frac{3}{4}\sqrt[n]{2}$$ 1p

$$\lim_{n\to\infty} J = \frac{3}{4}$$ 1p

CLASA XII

PROBLEMA 4

Problemă propusă - Concurs Țarină

Problemă. *Fie $(R,+,\cdot)$ un inel și $Z(R)=\{x\in R \mid xy=yx, \forall y\in R\}$ (centrul inelului R). Să se arate că dacă $x^4-x^3\in Z(R)$ pentru orice $x\in R$, atunci R este comutativ.*

Soluție. Se știe (sau se arată ușor) că $\forall x,y\in Z(R)$, $x\pm y\in Z(R)$ (de fapt, $Z(R)$ este un subinel al lui R). Vom folosi repetat această proprietate. 1p

Conform ipotezei avem:

$$x^4-x^3\in Z(R), \forall x\in R. \quad (1)$$

Înlocuind $x\mapsto -x$ în (1) avem:

$$x^4+x^3\in Z(R), \forall x\in R. \quad (2)$$ 1p

Din (1) și (2) rezultă:

$$2x^3\in Z(R), \forall x\in R. \quad (3)$$

Înlocuind $x\mapsto x+1$ în (1) avem $(x+1)^4-(x+1)^3\in Z(R), \forall x\in R$, adică 1p

$$x^4+3x^3+3x^2+x\in Z(R), \forall x\in R.$$

Folosind (2) și (3) rezultă:

$$3x^2+x\in Z(R), \forall x\in R. \quad (4)$$ 1p

Înlocuind $x\mapsto x-1$ în (2) avem $(x-1)^4+(x-1)^3\in Z(R), \forall x\in R$, adică

$$x^4-3x^3+3x^2-x\in Z(R), \forall x\in R.$$ 1p

Folosind (1) și (3) rezultă:

$$3x^2-x\in Z(R), \forall x\in R. \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă că $2x\in Z(R)$ și deci $2x^2\in Z(R)$, $\forall x\in R$. Acum (5) implică: 1p

$$x^2-x\in Z(R), \forall x\in R. \quad (6)$$

Pentru orice $x,y\in R$ din (6) rezultă:

$$(x+y)^2-(x+y)=(x^2-x)+(y^2-y)+xy+yx\in Z(R),$$ 1p

deci $xy+yx\in Z(R)$. Astfel avem $x(xy+yx)=(xy+yx)x$, de unde $x^2y=yx^2$, $\forall y\in R$, deci

$$x^2\in Z(R), \forall x\in R. \quad (7)$$ 1p

Din (6) și (7) rezultă că $x\in Z(R)$, $\forall x\in R$, deci R este comutativ.