INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „MARIAN ȚARINĂ"

Ediția a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a IV-a

PROBLEMA 1.

Trei muncitori de la *Salina Turda* au o problemă: În trei saci sunt cantități diferite de sare. Din sacul care conține cea mai mare cantitate se golește în ceilalți doi atâta sare astfel încât aceștia își dublează fiecare conținutul. După efectuarea acestei operații, cantitățile din cei trei saci sunt diferite. Din nou se golește din sacul ce are cea mai mare cantitate de sare în celelalți doi, fiecare din cei doi saci dublându-și din nou conținutul. Efectuând încă o dată această operație, fiecare sac va avea 48 kg, putând fi cărați în spate.

Câte kilograme de sare conținea la început fiecare din cei trei saci?

Cristian Petru Pop, Simona Pop

PROBLEMA 2.

Găsiți numărul natural $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2012$.

G.M. nr.10/2011

PROBLEMA 3.

Surorile Dana și Oana au împreună 36 de ani. Dana constată ca în urmă cu 4 ani o treime din vârsta ei era cât un sfert din vârsta de atunci a Oanei.

a) Aflați ce vârstă are fiecare .
b) Dacă mama lor are dublul vârstei Oanei, peste câți ani suma vârstelor surorilor va fi egală cu vârsta mamei.

Ion Marcel Neferu

PROBLEMA 4.

Dragoş, Cris și cu Mihai și-au adunat în pușculița lor cu cifru, bani pentru o consolă Xbox care costă 1549 lei. Astfel, fiecare din cei trei a depus în fiecare zi a lunii februarie 2016 un număr de bancnote de 1 leu egal cu numărul ce reprezintă data din calendar. Ei pot deschide pușculița doar aflând cifrul, corelând informațiile notate pe bilețelele lor:

Bilet Dragoş: Cifrul este un număr format din patru cifre

Bilet Cris: Prima cifră este 4 și ultima este 5

Bilet Mihai: Numărul care reprezintă cifrul este de 55 ori mai mare decât numărul care se obține din el prin ștergerea primei și a ultimei cifre.

a) Fără a deschide pușculița, aflați de câți lei mai au nevoie pentru consola Xbox și pentru un joc FIFA 2016, știind că jocul costă 219 lei
b) Aflați cifrul pentru a putea deschide pușculița.

Cristian Petru Pop, Simona Pop

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
Facultatea de Matematică și Informatică

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „MARIAN ȚARINĂ"
Ediția a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a V-a

PROBLEMA 1.

Alexandra și Cris se joacă un joc numit „***Turnul din Turda***". Astfel, începând cu Alexandra, ei spun pe rând câte un număr. Acestea sunt: 1,9, 36, 100, 225, …

a) Care sunt următoarele două numere spuse de Alexandra?
b) Care este al 100-lea număr spus și de către cine?
c) Care este cea mai mică diferență dintre 2016 și un număr rostit de cei doi?

Cristian Petru Pop

PROBLEMA 2.

Se consideră numărul natural $n = 1657 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$

a) Să se determine numerele naturale nenule $a, b, c,$ pentru care $n = b^{2c}$
b) Pentru $a = 2016$ aflați restul împărțirii lui n la 1591.

Mariana Ursu, Monica Fodor

PROBLEMA 3.

Pe o tablă se scriu toate numerele naturale de la 1 la un anumit număr n, divizibil cu 289. Se șterg apoi de pe tablă toți multiplii de 289.

Arătați că suma numerelor rămase pe tablă este un pătrat perfect.

Vasile Șerdean, Gheorghe Lobonț

PROBLEMA 4.

Fie $A = (n+1)^{2008} - n^{2008}$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că numărul $A^2 + 4A + 2$ nu poate fi pătratul unui număr natural.

* * *

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Facultatea de Matematică şi Informatică

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a VI-a

PROBLEMA 1.

Determinați numerele prime p pentru care $p+2$; p^2+4; p^3+2 și p^4-2 sunt simultan numere prime.

* * *

PROBLEMA 2.

Unghiurile A, B, C ale unui triunghi au măsurile direct proporționale cu 30, 10 și respectiv 5, iar $BC = 12 + AC$.

Calculați lungimea bisectoarei $[AE$, cu $E \in (BC)$.

Vasile Șerdean, Ioan Groza

PROBLEMA 3.

În mulțime numerelor naturale nenule se consideră ecuația:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{(x,y)}-\frac{n}{[x,y]},\ n \in N$$

(unde (x,y) și $[x,y]$ sunt cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y).

a) Să se arate că ecuația are soluții numai pentru n impar

b) Pentru $n = 2015$ determinați o soluție a ecuației.

Mariana Ursu, Monica Dan

PROBLEMA 4.

În triunghiul ABC, unghiul format de înălțimea AD, $D \in (BC)$, și mediana BM, $M \in (AC)$ are măsura de 60°. Arătați că $[AD] \equiv [BM]$.

* * *

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINȚIFICE

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Facultatea de Matematică şi Informatică

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ȚARINĂ"

Ediția a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a VII-a

PROBLEMA 1.

Dacă $n \in N^*$, să se arate că:

$$\frac{1}{7\sqrt{6}}+\frac{1}{17\sqrt{66}}+\frac{1}{27\sqrt{176}}+\cdots+\frac{1}{(10n-3)\sqrt{(5n-4)(5n+1)}}<\frac{n}{2(5n+1)}.$$

Vasile Şerdean, Ancuța Nechita

PROBLEMA 2.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ numere reale strict pozitive.

Să se arate că dacă $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ atunci

$$\left\{\frac{x_1^2+1}{y_1}, \frac{x_2^2+1}{y_2}, \dots, \frac{x_n^2+1}{y_n}\right\} \cap \{x \in R / x \geq 2\} \neq \emptyset.$$

Gheorghe Lobonț

PROBLEMA 3.

Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ și diagonalele AC și BD sunt perpendiculare. Fie P un punct arbitrar pe BC. Notăm $AP \cap DC = \{M\}$ și $DP \cap AB = \{N\}$. Să se arate că $BN \cdot CM = AD^2$.

G.M. nr.10-11/1987

PROBLEMA 4.

În triunghiul ABC, $m(\widehat{CAB}) = 30°$ iar $m(\widehat{ABC}) = 105°$. Considerăm punctul O în interiorul triunghiului astfel încât $m(\widehat{OAB}) = 15°$ și $m(\widehat{OBA}) = 75°$. Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{OCB}$.

* * *

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „MARIAN ȚARINĂ"
Ediția a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a VIII-a

PROBLEMA 1.

Dacă a, b, c, d sunt numere reale cu produsul egal cu 1 și $1 + a + ab + abc \neq 0$, să se arate că:

a) $1 + b + bc + bcd \neq 0$, $1 + c + cd + cda \neq 0$, $1 + d + da + dab \neq 0$

b) $\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1$

c) $\frac{2016+a}{1+a+ab+abc} + \frac{2016+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2016+c}{1+c+cd+cda} + \frac{2016+d}{1+d+da+dab} = 2017.$

Vasile Șerdean

PROBLEMA 2.

Fie $x, y, z \in R_+$. Arătați că $\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$

* * *

PROBLEMA 3.

Se dă tetraedrul $ABCD$ și M un punct în interiorul triunghiului ABD astfel încât $MC \perp AB$ și $DA^2 + MB^2 = DB^2 + MA^2$. Arătați că $AB \perp DC$.

Dragoș Constantinescu

PROBLEMA 4.

Fie M un punct în interiorul tetraedrului $ABCD$ și $\{A_1\} = AM \cap (BCD)$, $\{B_1\} = BM \cap (ACD)$, $\{C_1\} = CM \cap (ABD)$, $\{D_1\} = DM \cap (ABC)$.

Să se demonstreze că:

$\frac{MA_1}{MA} + \frac{MB_1}{MB} + \frac{MC_1}{MC} + \frac{MD_1}{MD} = \frac{4}{3}$ dacă și numai dacă $\frac{MA_1}{MA} = \frac{MB_1}{MB} = \frac{MC_1}{MC} = \frac{MD_1}{MD} = \frac{1}{3}$.

Gheorghe Lobonț

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1. Determinaţi numerele reale strict pozitive a, b, c ştiind că

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}.$$

(***)

PROBLEMA 2. Pentru o mulţime oarecare de numere X notăm cu $S(X)$ suma elementelor mulţimii X.

Să se determine submulţimile nevide şi disjuncte H_1, H_2, H_3 ale mulţimii $H=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ astfel încât $H_1\cup H_2\cup H_3=H$ şi produsul $S(H_1)\cdot S(H_2)\cdot S(H_3)$ să fie minim.

András Szilárd

PROBLEMA 3. Fie ABC un triunghi oarecare ascuţitunghic şi fie H ortocentrul său.

Fie M punctul determinat de relaţia

$$\operatorname{tg}B\cdot\overrightarrow{MB}+\operatorname{tg}C\cdot\overrightarrow{MC}=\operatorname{tg}A\cdot\overrightarrow{MA}.$$

Demonstraţi că:

a) punctele M, A, H sunt coliniare;

b) are loc relaţia $\dfrac{MA}{MH}=\dfrac{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C}{2}$.

Daniel Văcăreţu

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, pentru care numerele $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{5})$, $f(\sqrt{8})$ au partea întreagă zero.

L. Panaitopol

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
Facultatea de Matematică și Informatică

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „MARIAN ȚARINĂ"
Ediția a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a X-a

PROBLEMA 1. Determinați numerele complexe z cu $|z| \le 1$ și numerele naturale m și n, cu $m < n$, pentru care

$$(z+\bar{z})^m + (z+\bar{z})^{m+1} + \ldots + (z+\bar{z})^n = 2016.$$

Daniel Văcărețu

PROBLEMA 2. Să se rezolve, în mulțimea numerelor naturale, ecuația

$$\log_a n = \log_{a_1} n + \log_{a_2} n + \ldots + \log_{a_p} n,$$

unde $a, a_1, \ldots, a_p$ sunt $p+1$ numere reale supraunitare care satisfac relația $a^p \ge \max\{a_1, \ldots, a_p\}$.

Dorel I. Duca

PROBLEMA 3. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n pentru care coeficientul lui x^n în polinomul $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^3$ este pătrat perfect.

M. Chiriță

PROBLEMA 4. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Să se arate că

$$\log_{1-a_1}(1-na_2) + \log_{1-a_2}(1-na_3) + \ldots + \log_{1-a_n}(1-na_1) \ge n^2.$$

Titu Andreescu

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
Facultatea de Matematică și Informatică

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „MARIAN ȚARINĂ"
Ediția a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a XI-a

PROBLEMA 1. Să se calculeze determinantul matricei $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, unde

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{|i-j|}, & \text{dacă} \quad i\neq j\\ 2, & \text{dacă} \quad i=j\end{cases} \quad \text{cu} \quad i,j\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

Vasile Berinde

PROBLEMA 2. Fie $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ o funcție mărginită și $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că există

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{x}\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Dorel I. Duca

PROBLEMA 3. Fie $n\geq 3$ un număr natural impar și matricele $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det A\neq 0$ și $\operatorname{rang} B=1$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $\det A=\operatorname{tr}(B)\in\{-1,1\}$,

(b) $\det(A^*+BA^{-1})-\det(A^*-A^{-1}B)=2$,

unde $\operatorname{tr}(B)$ este urma matricei B, A^* este adjuncta lui A și A^{-1} este inversa matricei A în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Florin Stănescu

PROBLEMA 4. Să se determine toate funcțiile continue $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ pentru care

$$xf\left(x+\frac{1}{n}\right)-\left(x+\frac{1}{n}\right)f(x)+\frac{1}{n}\left(2x+\frac{1}{n}\right)f(x)f\left(x+\frac{1}{n}\right)=0,$$

oricare ar fi $x\geq 1$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

András Szilárd

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Facultatea de Matematică şi Informatică

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XVI-a, 25–26 MARTIE 2016

CLASA a XII-a

PROBLEMA 1. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{a^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{a^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right),$$

atunci când $a\in[2,+\infty)$.

Dorel I. Duca

PROBLEMA 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup, $(A,+)$ un grup abelian şi $m\in\mathbf{N}^*$. Notăm cu $(C_m,\cdot)$ grupul ciclic cu m elemente, adică $C_m=\{e,x,x^2,\ldots,x^{m-1}\}$ şi fie $A[m]=\{a\in A:\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m}=0\}$. Să se arate că:

a) Dacă $\mathrm{Hom}(G,A)=\{f:G\to A\mid f$ este morfism de grupuri$\}$ are o structură de grup abelian, atunci $A[m]$ este subgrup al lui A şi $(\mathrm{Hom}(C_m,A),+)\cong(A[m],+)$.

b) $(\mathrm{Hom}(S_n,A),+)\cong\begin{cases}\{\theta\}, & \text{pentru } n=1\\ A[2], & \text{pentru } n>1\end{cases}$, unde θ este morfismul nul.

Andrei Mărcuş, Gheorghe Lobonţ

PROBLEMA 3. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\,dx.$$

Ovidiu Furdui

PROBLEMA 4. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel şi $Z(R)=\{x\in R: xy=yx,\forall y\in R\}$.

Să se arate că dacă $x^4-x^3\in Z(R)$, pentru orice $x\in R$, atunci inelul $(R,+,\cdot)$ este comutativ.

Septimiu Crivei

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.