CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a IX-a

1. a) Să se demonstreze că pentru $n \geq 1$,este adevărată inegalitatea:$3^n \geq n + 2$.
b) Determinați funcția $f: \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{N}^*$ având proprietatea:

$$\left(m + 3^{f(n)}\right) \text{ divide } \left(f(m) + 3^n\right),\ (\forall)\, m, n \in \mathbf{N}^*.$$

CRISTIAN MOANȚĂ

2. Fie șirul de numere strict pozitive $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, cu proprietatea :

$$x_n(x_{n-1} + x_{n+1}) < 2x_{n-1} \cdot x_{n+1}\,, (\forall)n \geq 1.$$

Arătaţi că : $x_0 \geq x_1$.

DAN SECLĂMAN

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq1}$ și $(b_n)_{n\geq1}$ cu $a_1 = 1$, astfel încât:

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3},\ b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}\,, (\forall)n \geq 1.$$

a) Calculați a_2, a_3, b_1, b_2 și b_3 .
b) Arătați că $(b_n)_{n\geq1}$ este progresie geometrică.
c) Determinați termenii generali ai celor două șiruri.

R.M.C. 1/2015-2016

4. Fie patrulaterul $ABCD$, H_1 ortocentrul triunghiului ABC și H_2 ortocentrul triunghiului DBC. Demonstrați că $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă $H_1H_2 \parallel AD$.

* * *

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a X-a

1. a) Să se rezolve în **R** ecuația : $x^{\log_{24} 14} + x \cdot 2^{\log_{24} x} = x^{\log_{24} 30}$.

b) Se consideră numerele reale, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, cu proprietatea că: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Să se demonstreze că:

$$\frac{\log_{a_1}^2 a_2}{na_1 + (n-1)} + \frac{\log_{a_2}^2 a_3}{na_2 + (n-1)} + \ldots + \frac{\log_{a_n}^2 a_1}{na_n + (n-1)} \geq 1.$$

CRISTIAN MOANȚĂ

2. a) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Arătați că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 3(1 + |z|^2)$, $(\forall) z \in \mathbf{C}$.

b) Deduceți că dacă $\varepsilon \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ este rădăcină cubică a unității,atunci pentru orice număr complex z,are loc egalitatea :

$$|z - 1|^2 + |z - \varepsilon|^2 + |z - \varepsilon^2|^2 = 3(1 + |z|^2).$$

R.M.C. 1/2015-2016

3. a) Arătați că funcția $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\lg x}{x}$, este strict crescătoare.

b) Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea: $(\sin x)^{\cos x} = (\cos x)^{\sin x}$.

* * *

4. Dacă $x, y \in (1, \infty)$ și $\log_x(x - 1) + \log_y(y - 1) \geq 0$, arătați că $x + y \geq 4$.

DAN SECLĂMAN

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a XI-a

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, determinați $n \in \mathbf{N}, n \leq 20$, cu proprietatea :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

R.M.C. 1/2015-2016

2. Fie $A = (a_{ij})_{1\leq i<j\leq n}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ n \geq 4$. Se construieşte matricea pătratică de ordinul $n-1$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i,j\leq n,\\ i,j\neq k}}$, $k = \overline{1,n}$, definită prin:

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{kk} - a_{ik} \cdot a_{kj}.$$

Să se determine $\alpha \in \mathbf{C}$ astel încât $\det B = \alpha \cdot \det A$.

CRISTIAN MOANȚĂ

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$$a_1 = 1 \text{ și } \frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n}, (\forall)\, n \geq 1.$$

Să se calculeze : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}$.

CĂTĂLIN CRISTEA

4. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încât există $a \in (0,1)$, cu proprietatea :

$$|f(x)| \leq a \cdot |x|, (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

a) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația : $f(x) = x$.

b) Dacă $g_n = \underbrace{f o f o \ldots o f}_{n\ ori}, n \in \mathbf{N}^*$, arătați că: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(2016) = 0$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(f(x))^2}{x}$ și $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(f(x))^2}{\sin x}$.

DAN SECLĂMAN

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINȚIFICE

CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție " $*$ "astfel :

$$x * y = -xy + 2x + 2y - 2\,, (\forall) x, y \in \mathbf{R}\,.$$

a) Demonstrați că legea " $*$ " este asociativă .
b) Determinați $a \in \mathbf{R}$ cu proprietatea : $a * x = x * a = a\,, (\forall) x \in \mathbf{R}$.
c) Să se calculeze : $\frac{1}{2016} * \frac{2}{2016} * \frac{3}{2016} * \ldots * \frac{4032}{2016}$.

* * *

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$, care are cel puțin 3 elemente având proprietatea : $ababa = a, (\forall) a, b \in A - \{0, 1\}$. Demonstrați că:
a) Inelul $(A, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero.
b) Inelul $(A, +, \cdot)$ este finit și determinați numărul de elemente ale inelului.

ANI DRĂGHICI

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri cu termenii generali:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n},\ b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \frac{1}{n+\sqrt{8}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}.$$

Să se calculeze limitele celor două șiruri. Dacă $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$, să se compare cele două limite?

CRISTIAN MOANȚĂ

4. Calculați integrala : $I = \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2+1} dx$.

* * *

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*