Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a VI-a - Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Câte numere prime de trei cifre pot fi transformate în cuburi perfecte printr-o schimbare a ordinii cifrelor lor? **Soluţie**

Cuburile perfecte de trei cifre sunt: 125, 216, 343, 512 şi 729. . . . . **1p**
Numerele prime de trei cifre trebuie să se termine cu o cifră impară, diferită de 5, şi să nu fie divizibile 3. Prin urmare, numerele căutate sunt printre numerele 251, 521, 433. . . . . **3p**
Se verifică şi se constată că toate aceste trei numere sunt prime. **3p**

Fiecare rezultat greşit (fals număr prim găsit sau număr prim omis) este penalizat.

Problema 2. Într-un triunghi ascuţitunghic, trei din cele şase unghiuri formate în jurul ortocentrului de dreptele care includ cele trei înălţimi au măsurile proporţionale cu numerele 5, 5 şi 7, iar suma măsurilor celorlalte trei unghiuri este egală cu 190°. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

Soluţie
Suma mşurilor unghiurilor proporţionale cu 5, 5, 7 este 170°. **1p**
Măsurile lor sunt $5x$, $5x$, $7x$, cu $5x + 5x + 7x = 170^\circ$, de unde $x = 10^\circ$. În jurul ortocentrului avem trei perechi de unghiuri opuse la vârf, deci congruente. De o parte a uneia din dreptele care conţine o înălţime se află câte un unghi din fiecare pereche. Ştim că trei dintre unghiuri au măsurile 50°, 50°, 70°, deci celelalte trei au măsurile 70°, 60°, 60°. **3p**
Folosind măsurile acestor unghiuri, se determină măsurile unghiurilor formate de înălţimi cu laturile: 20°, 30°, 40°, deci măsurile unghiurilor triunghiului sunt 50°, 60°, 70°. **3p**

Problema 3. În fiecare din cele 16 căsuţe ale unui pătrat 4×4 este scris câte unul din numerele $1, 2, 3, \ldots, 16$. Pe fiecare coloană se calculează suma numerelor. Dacă una din sumele obţinute este strict mai mare decât celelalte trei, aceasta se notează cu S.
a) Daţi exemplu de o completare a pătratului în care $S = 40$.
b) Care este cea mai mică valoare posibilă a lui S?

Soluţie

a) Un exemplu de asemenea completare este:

1	2	3	**10**
8	7	6	**5**
9	4	11	**12**
16	15	14	**13**

.... **2p**

b) Suma numerelor scrise în căsuţele pătratului este $1+2+3+\ldots+16=136$. Deoarece $136 = 4 \cdot 34$, rezultă că fie suma numerelor de pe fiecare coloană este 34, fie există o coloană pe care suma este cel puţin 35. În primul caz nu există S, iar din cazul al doilea rezultă că S este cel puţin 35. .... **3p**

Pentru a demonstra că valoarea minimă a lui S este 35, rămâne să dăm un exemplu de completare a pătratului astfel încât o coloană are suma 35, iar celelalte coloane au sume mai mici. Iată o astfel de completare:

1	2	3	**4**
8	7	6	**5**
9	10	11	**12**
16	15	13	**14**

(Suma numerelor de pe ultima coloană este 35, în vreme ce pe primele trei coloane sumele sunt 34, 34, respectiv 33, deci ultima coloană este cea cu $S = 35$.) **2p**

Problema 4. Numerele naturale nenule m şi n au proprietatea că numărul $m^{2016} + m + n^2$ este divizibil cu numărul mn.

a) Daţi un exemplu de două numere naturale nenule m şi n, $m > n$, care verifică proprietatea din enunţ.

b) Arătaţi că m este pătrat perfect.

Soluţie

a) De exemplu, $m = 4$, $n = 2$. **2p**

b) Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n, iar $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $m = da$, $n = db$, cu $(a, b) = 1$. **1p**

Condiţia din enunţ revine la faptul că $d^{2016}a^{2016} + da + d^2b^2$ este divizibil cu d^2ab. Rezultă că dab divide $d^{2015}a^{2016} + a + db^2$. **1p**

Cum a divide $d^{2015}a^{2016}$, rezultă că a divide db^2. Dar $(a, b) = 1$, deci a divide d. **1p**

Pe de altă parte, d divide $d^{2015}a^{2016}$ şi db^2, deci d divide a. **1p**

Din cele de mai sus rezultă că $d = a$, deci $m = d^2$, prin urmare m este pătrat perfect. **1p**