Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule x şi y care verifică relaţia

$$x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}.$$

Gazeta Matematică

Soluţia 1.

Scriind egalitatea sub forma $(x+y) - \sqrt{x} = \sqrt{xy} + \sqrt{y}$ şi ridicând la pătrat, obţinem $x^2 + xy + y^2 + x - y = 2(2y + x)\sqrt{x}$. Cum $2y + x \neq 0$, rezultă că $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, deci x este pătrat perfect. Similar, y este pătrat perfect **2p**

Notând $\sqrt{x} = a$ şi $\sqrt{y} = b$, egalitatea $a^2 + b^2 = ab + a + b$ conduce la $(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2$ **3p**

Obţinem $(a, b) \in \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$, pentru care $(x, y) \in \{(1,4); (4,1); (4,4)\}$ **2p**

Soluţia 2.

Înmulţind cu 2 egalitatea din enunţ şi trecând toţi termenii în membrul stâng obţinem:

$(x - 2\sqrt{xy} + y) + x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y} = 0$, ceea ce se scrie $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = 2$ **3p**

Atunci $(\sqrt{x} - 1)^2 \leq 2$, de unde $\sqrt{x} \leq \sqrt{2} + 1$, adică $x \leq 3 + 2\sqrt{2}$, şi, cum $x \in \mathbb{N}^*$, rezultă $x \in \{1,2,3,4,5\}$. Similar, $y \in \{1,2,3,4,5\}$ **2p**

Studiind cazurile, se obţin soluţiile $(1,4)$, $(4,1)$ şi $(4,4)$ **2p**

Observaţie. Prima parte a soluţiei de mai sus poate fi înlocuită cu următoarea argumentaţie:

Deoarece $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, din egalitatea din enunţ rezultă $\dfrac{x+y}{2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ **1p**

de unde $x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y} \leq 0$, adică $(\sqrt{x} - 1)^2 + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \leq 2$ **2p**

Problema 2. Se consideră mulţimea

$$M = \{\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + 2015x_{2015} \mid x_1, x_2, ..., x_{2015} \in \{-2, 3\}\ \}.$$

Arătaţi că $2015 \in M$ şi $2016 \notin M$.

Soluţie.

Un număr întreg n aparţine mulţimii M dacă există submulţimile disjuncte A şi B ale mulţimii $S = \{1, 2, ..., 2015\}$, cu $A \cup B = S$, astfel încât $-2a + 3b = n$, unde a este suma elementelor lui A şi b este suma elementelor lui B (pentru mulţimea vidă se consideră că suma "elementelor" este 0) **2p**

Atunci $n = 5b - 2(a+b)$ şi, cum $a + b = 1 + 2 + ... + 2015$, rezultă că $n = 5b - 2015 \cdot 2016$ **1p**

Ca urmare, n este divizibil cu 5, deci $2016 \notin M$ **1p**

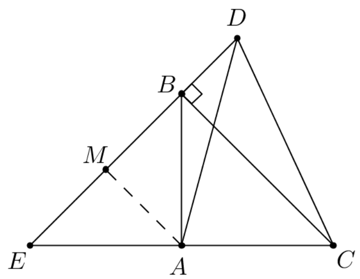
Pentru a arăta că $2015 \in M$, este suficient să găsim o submulţime $B \subset \{1, 2, ..., 2015\}$ cu suma elementelor $b = \dfrac{1}{5}(2015 \cdot 2016 + 2015) = 403 \cdot 2017$ **1p**

Un exemplu se obţine dacă B este reuniunea a 403 perechi de elemente din S care au suma 2017, de pildă $(2, 2015)$, $(3, 2014)$, ..., $(404, 1613)$.

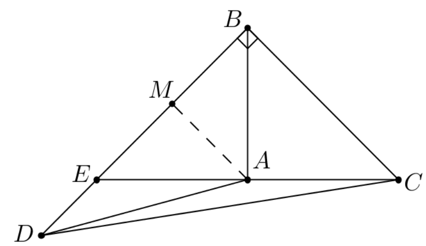
Considerând aşadar $x_2 = x_3 = ... = x_{404} = x_{1613} = x_{1614} = ... = x_{2015} = 3$ şi $x_1 = x_{405} = x_{406} = ... = x_{1612} = -2$, obţinem $2015 \in M$ **2p**

Problema 3. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Pe dreapta perpendiculară în B pe BC se consideră punctul D astfel încât $AD = BC$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BAD}$.

Soluţia 1.



Cazul 1



Cazul 2

Cazul 1. D şi A sunt în semiplane diferite determinate de dreapta BC.

Notând $\{E\} = AC \cap DB$, rezultă că $m(\widehat{ABE}) = 45°$, deci $[BA]$ este bisectoare şi înălţime în triunghiul BEC. Ca urmare, $[AE] \equiv [AC]$ **1p**

Construind $AM \perp BE$, rezultă că $[AM]$ este linie mijlocie în triunghiul EBC, deci $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$ **1p**

În triunghiul dreptunghic MAD, cateta $[AM]$ este jumătate din ipotenuza $[AD]$, deci $m(\widehat{ADB}) = 30°$ **1p**

Rezultă $m(\widehat{BAD}) = 180° - m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{ABD}) = 180° - 30° - 135° = 15°$ **1p**

Cazul 2. D şi A sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta BC.

Notând $\{E\} = AC \cap DB$, rezultă că $m(\widehat{ABE}) = 45°$, deci $[BA]$ este bisectoare şi înălţime în triunghiul BEC. Ca urmare, $[AE] \equiv [AC]$ **1p**

Construind $AM \perp BE$, rezultă că $[AM]$ este linie mijlocie în triunghiul EBC, deci $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$. În triunghiul dreptunghic MAD, cateta $[AM]$ este jumătate din ipotenuza $[AD]$, deci $m(\widehat{ADB}) = 30°$ **1p**

Rezultă $m(\widehat{BAD}) = 180° - m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{ABD}) = 180° - 30° - 45° = 105°$ **1p**

Soluţia 2.

Cazul 1. D şi A sunt în semiplane diferite determinate de dreapta BC.

Construind dreptunghiul $BCFD$, rezultă că $[AD] \equiv [BC] \equiv [DF]$ **2p**

$\Delta ABD \equiv \Delta ACF$ (L.U.L.), de unde $[AD] \equiv [AF]$ şi $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAF}$ **1p**

Cum $[AD] \equiv [AF]$ şi $[AD] \equiv [DF]$, triunghiul ADF este echilateral, deci:

$$m(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2}\left(90° - m(\widehat{DAF})\right) = 15° \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Cazul 2. D şi A sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta BC.

Construind dreptunghiul $BCFD$, rezultă că $[AD] \equiv [BC] \equiv [DF]$ **2p**

$\Delta ABD \equiv \Delta ACF$ (L.U.L.), de unde $[AD] \equiv [AF]$ şi $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAF}$ **1p**

Cum $[AD] \equiv [AF]$ şi $[AD] \equiv [DF]$, triunghiul ADF este echilateral, de unde:

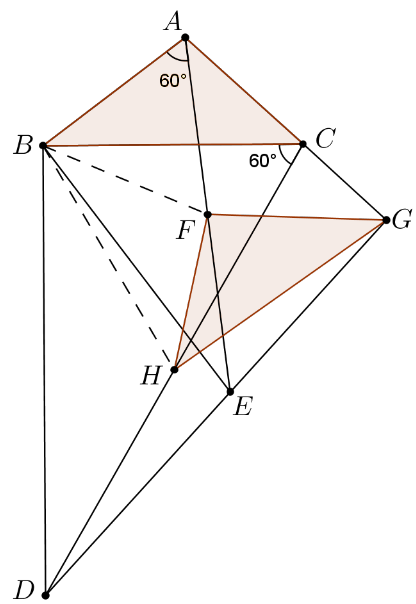
$$m(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2}\left(360° - m(\widehat{DAF}) - m(\widehat{BAC})\right) = 105° \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC, cu $m(\widehat{A}) > 60°$ şi $m(\widehat{C}) > 30°$. În semiplanul determinat de dreapta BC care nu conţine punctul A, se consideră punctele D şi E astfel încât $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD}) = 90°$ şi $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCD}) = 60°$. Se notează cu F şi H mijloacele segmentelor $[AE]$, respectiv $[CD]$, iar cu G intersecţia dreptelor AC şi DE. Arătaţi că:

a) $\Delta EBD \sim \Delta ABC$;

b) $\Delta FGH \equiv \Delta ABC$.

Soluţie.



a) Din enunţ rezultă că $\Delta ABE \sim \Delta CBD$, de unde $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{AB}{CB}$, adică $\dfrac{EB}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$ **1p**

Deoarece unghiurile ABC şi EBD au acelaşi complement, rezultă că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{EBD}$, deci $\Delta EBD \sim \Delta ABC$ (L.U.L.) **1p**

b) Din $\Delta EBD \sim \Delta ABC$ avem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BDE}$, de unde rezultă că:

$m(\widehat{DGC}) = 360° - \Big(m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{BDE}) + m(\widehat{BCG})\Big) = 360° - \Big(m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BCG})\Big) = 90°$ ... **1p**

$[GF]$ este mediană în triunghiul dreptunghic GAE, deci $GF = \dfrac{1}{2}AE$. Cum $[AB]$ se opune unui unghi de $30°$ în triunghiul dreptunghic BAE, rezultă $AB = \dfrac{1}{2}AE$, deci $[AB] \equiv [FG]$. Analog se arată că $[BC] \equiv [GH]$ **2p**

Din $\Delta FGH \equiv \Delta FBH$ (L.L.L.) rezultă că $m(\widehat{FGH}) = m(\widehat{FBH}) = 90° - m(\widehat{HBD}) - m(\widehat{CBF})$.

Având în vedere că $m(\widehat{HBD}) = m(\widehat{HDB}) = 30°$ şi că $m(\widehat{CBF}) = m(\widehat{ABF}) - m(\widehat{ABC}) = 60° - m(\widehat{ABC})$, obţinem $m(\widehat{FGH}) = m(\widehat{ABC})$, de unde rezultă că $\Delta FGH \equiv \Delta ABC$ (L.U.L.) **2p**