Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

Ministerul Educaţiei Naţionale
şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a VIII-a

Problema 1. Arătaţi că într-o piramidă patrulateră regulată două feţe laterale opuse sunt perpendiculare dacă şi numai dacă unghiul dintre două feţe laterale alăturate are măsura de $120°$.

Gazeta Matematică

Soluţie . Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Notăm cu a lungimea laturii AB. Feţele VAD şi VBC sunt perpendiculare dacă şi numai dacă triunghiul VMN este dreptunghic isoscel cu laturile $VM = VN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, unde M şi N sunt mijloacele muchiilor AD respectiv BC .... 2 puncte.

Dacă P este piciorul perpendicularei din A pe VB (acelaşi cu piciorul perpendicularei din C pe VB), atunci obţinem echivalent $PC = PA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (evaluând aria triunghiului VBC în două moduri) .... 2 puncte

Aceasta este echivalent cu faptul că triunghiul isoscel ACP are măsura unghiului $\angle APC$ de $120°$(folosind eventual o funcţie trigonometrică) ... 2 puncte

Unghiul plan al diedrului căutat este $\angle APC$ 1p

Problema 2. Pentru orice orice număr natural nenul n notăm cu x_n numărul numerelor naturale de n cifre, divizibile cu 4, formate cu cifrele 2, 0, 1 sau 6.

a) Să se calculeze x_1, x_2, x_3 şi x_4.

b) Să se găsească numărul natural n astfel încât

$$1 + \left[\frac{x_2}{x_1}\right] + \left[\frac{x_3}{x_2}\right] + \left[\frac{x_4}{x_3}\right] + ... + \left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = 2016,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Soluţie . a) $x_1 = 1$ (0 este divizibil cu 4), $x_2 = 4$ (numerele 12, 16, 20 şi 60 sunt divizibile cu 4), $x_3 = 3 \cdot 5$, (pentru că prima cifră nu poate fi 0 iar ultimele două pot fi 12, 16, 20, 60 şi 00), $x_4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (pentru că prima cifră nu poate fi 0, pentru a 2-a avem 4 posibilităţi iar ultimele două pot fi

12, 16, 20, 60 şi 00) .... 3 puncte.

b) Dacă $n \geq 3$, un număr A care verifică condiţiile din enunţ este de forma $A = \overline{a_1 a_2 ... a_{n-2} pq}$ unde prima cifră poate lua 3 valori, fiecare dintre cifrele $a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$ poate fi aleasă în 4 moduri iar ultimele două pot fi 12, 16, 20, 60 şi 00.

Rezultă că $x_n = 3 \cdot 4^{n-3} \cdot 5$ pentru orice $n \geq 3$ .... 2 puncte

Pentru orice $n \geq 3$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 4$, de unde $1 + \left[\dfrac{x_2}{x_1}\right] + \left[\dfrac{x_3}{x_2}\right] + \left[\dfrac{x_4}{x_3}\right] + ... + \left[\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right] = 1 + 4 + 3 + 4(n-2)$, $4n = 2016, n = 504$ .... 2 puncte .

Problema 3. a) Demonstraţi că pentru orice număr întreg k, ecuaţia $x^3 - 24x + k = 0$ are cel mult o soluţie întreagă.

b) Arătaţi că ecuaţia $x^3 + 24x - 2016 = 0$ are exact o soluţie întreagă.

Soluţie . a) Presupunem prin absurd că există două numere întregi diferite m şi n astfel încât $m^3 - 24m + k = 0$ şi $n^3 - 24n + k = 0$.

Prin scădere obţinem $(m-n)(m^2 + mn + n^2 - 24) = 0$ .... 1 punct

$m^2 + mn + n^2 = 24$ (m şi n sunt diferite) de unde $(2m+n)^2 + 3n^2 = 96$ 1 punct

$n^2 \leq 32$, $n^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ .... 1 punct

$(2m+n)^2 \in \{96, 93, 84, 69, 48, 21\}$, contradicţie .... 1 punct

b) $x(x^2 + 24) = 2016$ de unde x poate fi doar natural nenul. $x = 12$ verifică ecuaţia .... 1 punct

Dacă prin absurd există $x < y$ naturale care verifică ecuaţia atunci $x^2 + 24 < y^2 + 24$ .... 1 punct

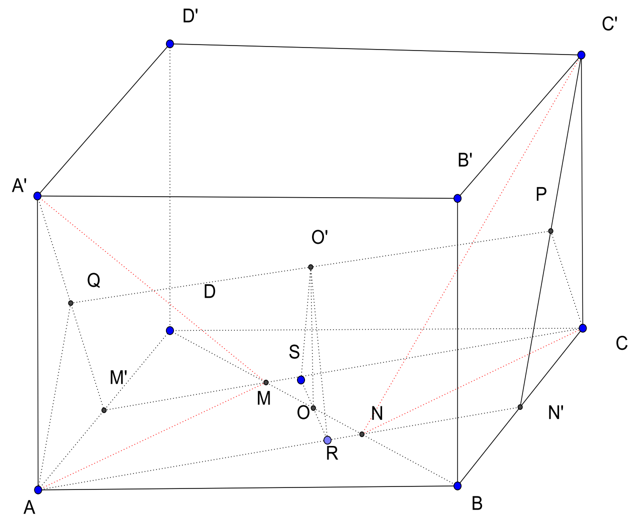
$2016 = x(x^2 + 24) < x(y^2 + 24) = 2016$ contradicţie .... 1 punct

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi M repectiv N picioarele perpendicularelor duse din A' şi C' pe BD. Lungimile muchiilor AB, BC şi AA' sunt egale cu $\sqrt{6}, \sqrt{3}$ şi respectiv $\sqrt{2}$.

a) Demonstraţi că $A'M \perp C'N$.

b) Calculaţi măsura unghiului dintre planele $(A'MC)$ şi (ANC').

Soluţie .



a) $AM \perp BD$, $AM = \sqrt{2}$ deci triunghiul $A'AM$ este isoscel. Analog triunghiul $C'CN$ .... 1 punct

Rezultă $\angle A'MA = \angle C'NC = 45°$, deci unghiul dintre dreptele $A'M$ şi $C'N$ este de $90°$ .... 1 punct.

b) Fie $CM \cap AD = \{M'\}$, $AN \cap BC = \{N'\}$, P şi Q mijloacele segmentelor $[N'C']$ respectiv $[A'M']$.$BD = 3, DM = MN = NB = 1$, $DM' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. M' şi N' sunt mijloacele muchiilor $[AD]$ respectiv $[BC]$. Intersecţia planelor $(A'MC)$ şi (ANC') este dreapta PQ .... 2 puncte

Fie O şi O' mijloacele segmentelor $[BD]$ respectiv $[PQ]$ şi $R \in AN$, $S \in CM$ intersecţiile perpendicularei din O pe AN (şi pe CM). Unghiul planelor $(A'MC)$ şi (ANC') este $\angle RO'S$ .... 1 punct

$CM' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,$RS = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (se exprimă aria lui $AN'CM'$ în două moduri), $OO' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rezultă că triunghiul $RO'S$ este echilateral deci măsura unghiul căutat este de $60°$ .... 2 puncte.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.