Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 Martie 2016
CLASA a X-a

Enunţuri şi bareme

Problema 1. Determinaţi numerele reale $x \in (2,\infty)$, care sunt soluţii ale ecuaţiei

$$\cos(\pi \log_3(x+6)) \cdot \cos(\pi \log_3(x-2)) = 1.$$

Supliment Gazeta Matematică

Soluţie: Ipoteza conduce la $\cos(\pi \log_3(x+6)) = \cos(\pi \log_3(x-2)) = \pm 1$, deci există $k, l \in \mathbb{Z}$, de aceeaşi paritate, astfel încât $\pi \log_3(x+6) = k\pi$ şi $\pi \log_3(x-2) = l\pi$. **2p**

Se obţin relaţiile $x+6 = 3^k$ şi $x-2 = 3^l$. Prin scădere suntem conduşi la $3^k - 3^l = 8$. **1p**

Egalitatea nu este posibilă dacă $k, l < 0$. Atunci $3^l\left(3^{k-l}-1\right) = 8$, de unde $3^l = 1$, adică $l = 0$ şi apoi $k = 2$. La final obţinem $x = 3$. **4p**

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, distincte şi având acelaşi modul, astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = 0.$$

Demonstraţi că a, b, c reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic sau echilateral.

Soluţie: Putem presupune $|a| = |b| = |c| = 1$. Ipoteza devine $(a+b+c)^2 = ab+bc+ca$, de unde $(a+b+c)^2 = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ sau $(a+b+c)^2 = abc\overline{(a+b+c)}$. Prin trecere la modul avem $|a+b+c| \in \{0,1\}$. **3p**

Dacă $|a+b+c| = 0$, deducem că ortocentrul triunghiului, având vârfuri de afixe a, b, c, coincide cu centrul cercului circumscris aceluiaşi triunghi, deci acest triunghi este echilateral. **1p**

Dacă $|a+b+c| = 1$, atunci $(a+b+c)\overline{(a+b+c)} = 1$, de unde $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1$, adică $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$. Atunci două vârfuri ale acestui triunghi sunt diametral opuse, deci este dreptunghic. **3p**

Problema 3. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Deteminaţi cea mai mare valoare a expresiei

$$|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y|,$$

în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x| \leq 1$ şi $|y| \leq 1$;

b) $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x| \leq 1$ şi $|y| \leq 1$.

Soluţie: a) Deoarece pentru orice numere reale u, v avem $|u+v| + |u-v| \in \{\pm 2u, \pm 2v\}$, deducem că $|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y| \leq \max\{2|\alpha|, 2|\beta|\}$. **2p**

Aceasta este valoarea maximă, deoarece egalitatea se obţine, de exemplu, când $x = y = 1$. **1p**

b) Avem egalitatea $|\alpha x + \beta y|^2 + |\alpha x - \beta y|^2 = 2|\alpha x|^2 + 2|\beta y|^2$. Dar

$(|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y|)^2 \leq 2\left(|\alpha x + \beta y|^2 + |\alpha x - \beta y|^2\right)$, de unde $|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y| \leq 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. **3p**

Valoarea maximă $2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se poate obţine pentru $x = 1$ şi $y = i$. **1p**

Problema 4. a) Demonstraţi că există funcţii neperiodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{5} f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) Demonstraţi că orice funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$g(x+1) + g(x-1) = \sqrt{3} g(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este periodică.

Soluţie: a) Căutăm soluţii printre funcţiile de forma $f(x) = a^x$, unde $a > 0$. Obţinem egalitatea $a + a^{-1} = \sqrt{5}$, de unde $a = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$. Se verifică faptul că funcţiile $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$ şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$ egalitatea din ipoteză. **3p**

b) Fie g o funcţie care verifică egalitatea din ipoteză. Atunci $g(x+2) + g(x) = \sqrt{3} g(x+1)$, de unde $g(x+2) + g(x) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} g(x) - g(x-1)\right)$, deci $g(x+2) = 2g(x) - \sqrt{3} g(x-1)$. Apoi $g(x+3) = 2g(x+1) - \sqrt{3} g(x) = 2\left(\sqrt{3} g(x) - g(x-1)\right) - \sqrt{3} g(x)$, de unde $g(x+3) = \sqrt{3} g(x) - 2g(x-1)$. Apoi $g(x+4) = \sqrt{3} g(x+1) - 2g(x) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} g(x) - g(x-1)\right) - 2g(x)$, de unde $g(x+4) = g(x) - \sqrt{3} g(x-1)$. În continuare, $g(x+5) = g(x+1) - \sqrt{3} g(x)$, deci $g(x+5) = -g(x-1)$, de unde $g(x+6) = -g(x)$. Apoi $g(x+12) = -g(x+6) = g(x)$, de unde obţinem concluzia. **4p**