CONCURSURI ȘI OLIMPIADE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală , județul Dolj , 21.02.2016

Clasa a V-a

1. Cel mai mare număr $\overline{abcd}$, scris în baza 10, reprezintă anul de naştere al "*Domnului Problemă*", care verifică relația: $\overline{(c+1)d} = 5 \cdot \overline{a(b-1)}$. Să se determine vârsta acestuia.

CRISTIAN MOANȚĂ

2. a) Găsiți două numere naturale care împărțite dau câtul 49, iar restul este strict mai mare decât 4 și cu 294 mai mic decât deîmpărțitul.

b) Fie $A = n^{2016} + (n+1)^{2016} + (n+2)^{2016} + \ldots + (n+9)^{2016}$, unde $n \in \mathbf{N}$. Să se determine restul împărțirii lui A la 10.

VASILE SCURTU (G.M.5/2012,*adaptare*)

3. Fie $a, b, c, n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se arate că $A=(a^n + b^n)(c^n + b^n)(a^n + c^n)$, este divizibil cu 2.

b) Să se arate că: $4^A - 1 \vdots 15$.

FLORENTIN NICOLAE , *prof.* Filiași

4. Să se determine numerele $\overline{abc}$ astfel încât: $2 \cdot \left(\overline{ab} + \overline{ba}\right) + 2^c = 67$.

GHEORGHE IACOB (G,M.10/2015)

Clasa a VI-a

1. Ștefan este pasionat de istorie. El se informează despre un domnitor și formulează următoarea problemă:"anul istoricește $\overline{1xy(x+1)}$ verifică condiția: suma dintre $\overline{xy}$, cifra sutelor și cifra zecilor este 98". Despre ce an istoric s-a informat Ștefan?

CRISTIAN MOANȚĂ

2. a) Determinați numerele prime p cu proprietatea că $p+4$ și p^3+2 sunt simultan numere prime.

b) Demonstrați că nu există numere prime q astfel încât q^5+4 și $q^{2016}+4$ să fie simultan numere prime.

CĂTĂLIN CRISTEA

3. Fie unghiurile congruente $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_{100}OA_1$ în jurul punctului O. Se colorează semidreapta $[OA_1$ şi apoi se colorează fiecare a şasea semidreaptă după cea colorată (deci se colorează $[OA_1$, $[OA_7$, $[OA_{13}$,...). În acest procedeu de stabilire a semidreptei ce urmează să fie colorată, se numără şi semidreptele colorate întâlnite pe parcurs.

a) Să se determine câte semidrepte rămân necolorate.

b) Să se demonstreze că rămân semidrepte opuse necolorate după finalizarea procedeului, apoi să se determine numărul dreptelor determinate de acestea.

c) Să se precizeze dacă rămân semidrepte necolorate perpendiculare.

VASILE POPA (O.M., *faza locală*,Galaţi,2012)

4. Două unghiuri suplementare au o latură comună şi bisectoarele lor determină un unghi cu măsura de 60°. Determinaţi măsurile celor două unghiuri.

MARIN SIMION (G.M.10/2013)

Clasa a VII-a

1. a) Determinaţi $x \in \mathbf{Q}^*$ pentru care $x + \frac{1}{x} + 2 \in \mathbf{Z}$.

Pentru x determinat la punctul a), să se arate că:

b) $\left(x^{2016} + \frac{1}{x^{2016}} + 2014\right) \vdots\, 2016$;

c) $\left(x^n + \frac{1}{x^n} + 2014\right) \vdots\, 4, (\forall) n \in \mathbf{N}$.

DAN SECLĂMAN

2. a) Demonstraţi că : $\left[1 + \frac{1}{k(k+1)}\right]^2 = 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}, (\forall) k \in \mathbf{N}^*$.

b) Dacă $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$, arătaţi că $S_{10} = \frac{120}{11}$.

c) Câţi termeni trebuie să aibă S_n, astfel încât $[S_n] = 2016$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

* * *

3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB > AC$, în care bisectoarea unghiului ACB intersectează dreapta AD în punctul E, iar perpendiculara în A pe AC intersectează dreapta BC în punctul F. Fie $CE \cap AB = \{M\}$ şi $CE \cap AF = \{N\}$. Ştiind că triunghiul AMN este echilateral, demonstraţi că $[AC] \equiv [EF]$.

CĂTĂLIN CRISTEA

4. Fie dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara AM pe BD $(M \in BD)$ intersectează BC şi DC, respectiv în E şi F. Arătaţi că : $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$.

* * *

Clasa a VIII-a

1. a) Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 10$ are loc inegalitatea:

$$9 \cdot n^3 > 5 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3).$$

CRISTIAN MOANȚĂ

b) Să se arate că: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2, (\forall) a, b, c \in (0, \infty)$.

* * *

2. a) Dacă $n \in \mathbf{N}^*$, să se calculeze : $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

b) Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ știind că :

$$\frac{1-a_1(1-\sqrt{2})}{a_1+1+\sqrt{2}} + \frac{1-a_2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{a_2+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1-a_n(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{a_n+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \in \mathbf{N},\ (\forall)\ a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{Q}_+^*.$$

* * *

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic,G mijlocul segmentului (AB') și $\{E\} = A'C \cap (AB'D')$. Dacă $EG \perp A'C$, $EG \perp AB'$, arătați că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

M. FIANU , G. TURCITU

4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, respectiv ABD.

a) Arătați că planul $(G_1G_2G_3)$ este paralel cu planul (ABC).

b) Demonstrați că dreptele AG_1, BG_2, CG_3 sunt concurente.

* * *

Clasa a IX-a

Mate.Info.Ro
CONFIDENȚIAL

1. Fie șirul $(d_n)_{n\geq 1}$ definit descriptiv, astfel:

$$d_1 = 0{,}1;\ d_2 = 0{,}11;\ d_3 = 0{,}111;\ \ldots;\ d_n = 0{,}\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ori}}.$$

a) Să se determine primele 2016 zecimale ale numărului $\sqrt{d_{4032}}$.

b) Să se calculeze suma: $\sum_{k=1}^{n} 10^k \cdot d_k$.

DAN SECLĂMAN

2. Fie numerele $x, a, b \in (0, \infty)$ astfel încât $a+b=2$. Demonstrați că:

$$\sqrt{x+\frac{1}{a^2}} + \sqrt{x+\frac{1}{b^2}} \geq 2\sqrt{x+1}.$$

PETRE NĂCHILĂ (G.M.12/2000)

3. Fie *ABCD* un patrulater convex, *M* mijlocul lui [*AB*], *N* mijlocul lui [*BC*], *E* punctul de intersecţie a dreptelor *AN* şi *BD*, iar *F* punctul de intersecţie a dreptelor *DM* şi *AC*. Arătaţi că dacă $BE = \frac{1}{3}BD$ şi $AF = \frac{1}{3}AC$, atunci *ABCD* este paralelogram.

*   *   *

4. Se consideră hexagonul convex $ABCDEF$ şi se notează cu $G_A, G_B, G_C, G_D, G_E, G_F$ centrele de greutate ale pentagoanelor $BCDEF, ACDEF, ABDEF, ABCEF, ABCDF$ şi respectiv $ABCDE$.

a) Să se demonstreze că se poate construi un hexagon cu vectorii:

$$\overrightarrow{AG_A},\ \overrightarrow{BG_B},\ \overrightarrow{CG_C},\ \overrightarrow{DG_D},\ \overrightarrow{EG_E},\ \overrightarrow{FG_F}.$$

b) Să se determine raportul ariilor hexagoanelor $G_AG_BG_CG_DG_EG_F$ şi $ABCDEF$.

CRISTIAN MOANȚĂ

Clasa a X-a

1. a) Se consideră $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție strict concavă. Să se arate că nu există patru puncte pe graficul funcției f care să formeze un paralelogram.

b) Să se arate că:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^3 \le \frac{\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3}{\lambda_1 + \lambda_2},\ (\forall) x_1, x_2 \in [0,\infty), (\forall)\lambda_1, \lambda_2 \in [0,\infty).$$

Generalizați inegalitatea.

ANI DRĂGHICI

2. Fie $n \in \mathbf{N}, n \ge 2$ şi numerele $z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbf{C}$ astfel încât :

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1 \text{ şi } z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0.$$

a) Arătaţi că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \cdots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n, (\forall) z \in \mathbf{C}$.

b) Demonstraţi că:

$$|z - z_1| + |z - z_2| + \cdots + |z - z_n| \le n\sqrt{2}, (\forall)\ z \in \mathbf{C}, |z| \le 1.$$

IOAN ŞERDEAN (G.M.12/2014)

3. Fie A şi B imaginile soluțiilor ecuației: $z^2 - 13z + 72 + 30i = 0.(i^2 = -1)$

a) Să se calculeze aria triunghiului AOB, unde O este originea planului complex.

b) Cât la sută din suprafața triunghiului AOB acoperă mulțimea soluțiilor inecuației $|z| \le 4$?

*   *   *

4. a) Să se rezolve ecuația: $3^x = 2^x + 1$.

b) Să se rezolve în $(1,\infty)$ ecuația : $x^{\log_3 2} + 1 = (x-1)^{\log_2 3}$.

COSMIN MANEA , DRAGOŞ PETRICĂ (R.M.T.2010)

Clasa a XI-a

1. a) Se consideră matricea $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 4}$,definită astfel: $a_{ij} = \max(i,j)$ oricare ar fi $i,j = \overline{1,4}$. Să se calculeze $\det A$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ cu $AB = BA$ și $\det A = \det B = 0$. Să se arate că $\det(A^3 + B^3)$ este sumă a două cuburi de numere întregi.

CRISTIAN MOANȚĂ

2. a) Dați exemplu de matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ astfel încât $(A+B)^{2016} = (A-B)^{2016} = O_2$, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$ și $\det A \cdot \det B \neq 0$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ astfel încât $\left(A+B\right)^{2016} = \left(A-B\right)^{2016} = O_2$.
Demonstrați că $Tr(A) = Tr(B) = 0$ sau $\det A = \det B = 0$.

CĂTĂLIN CRISTEA

3. a) Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2016} \in \mathbf{R}$ astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2016} = 0$. Calculați :

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+a_1} + a_2\sqrt{n+a_2} + \ldots + a_{2016}\sqrt{n+a_{2016}}\right).$$

b) Arătați că există șiruri $\left(a_n\right)_{n\ge 0}$,cu $a_n \in \{-1,1\}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, astfel încât :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a_1} + \sqrt{n+a_2} + \ldots + \sqrt{n+a_n} - n\sqrt{n+a_0}\right) = \frac{1}{2}.$$

ROMANȚA GHIȚĂ,IOAN GHIȚĂ , *prof.* Blaj

4. a) Arătați că o funcție $f: \mathbf{R} \to \boldsymbol{R}$, periodică și neconstantă, nu are limită la $+\infty$.

b) Determinați funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică condițiile:

(i) există $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = a \in \mathbf{R}$; (ii) $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1), (\forall)x \in \mathbf{R}$.

DAN SECLĂMAN

Clasa a XII-a

1. Fie $M = \left\{ A(x) \middle| A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}.$

a) Să se arate că $\left(M,\cdot\right)$ este grup abelian.

b) Să se calculeze simetricul elementului $A\left(2016\right)$.

c) Să se calculeze $A^n\left(x\right), n \in \mathbf{N}^*$.

* * *

2. a) Fie $\left(G,\cdot\right)$ un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru. Să se arate că dacă $x \in G$ și $x^2 = e$ atunci $x = e$.

b) Fie G și G' două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente. Să se determine toate morfismele de grup de la G la G' .

* * *

3. Fie $a > 1$ și $f\colon \left[\frac{1}{a}, a\right] \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = k, (\forall)\, x \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$.

a) Calculați : $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{(x+1)\cdot f(x)}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

b) Calculați : $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{(x+1)\cdot \operatorname{arctg} x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

c) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $n \in \mathbf{N},\ n \geq 2.$ Să se determine : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^a \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$.

CRISTIAN MOANȚĂ

4. Determinați primitivele funcției $f\colon (0,\pi) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1+|\cos x|} \cdot \mathrm{e}^x$.

* * *