CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” - EDIȚIA a XIII-a

BĂILEȘTI, 12 MARTIE 2016

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect

1) Fie A = { $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, … , $\sqrt[3]{2016}$ }. Cardinalul multimii $A \cap \mathbb{Q}$ are valoarea :

a) 8 b) 10 c)12 d) 14

2) Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a \cdot b \cdot c = 1$ si expresia $E = (a^2 + 1)\cdot(b^2 + 1)\cdot(c^2 + 1)$. Cea mai mare valoare a expresiei $\frac{1}{E}$ este :

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{8}$

3) Fie ABCD un patrulater convex, E si F mijloacele diagonalelor [AC] si [BD], O mijlocullui [EF] iar M un punct oarecare situat in planul patrulaterului. Daca $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MO}$, atunci k este egal cu :

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

4) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel incat $[a, 3] - (b, 4] = [0, 2]$. Atunci a + b are valoarea :

a) 1 b) 2 c) 3 d)2016

5)Fie $a > 0$. Se stie ecuatia $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x^4+1}{x^2} + \frac{x^6+1}{x^3} + \ldots + \frac{x^{4032}+1}{x^{2016}} = a$ are o singura solutie pozitiva.

Numarul *a* este :

a) 2015 b) 2016 c) 4030 d) 4032

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20puncte)

Fie $n,k \in \mathbb{N}^*$ iar $n_1, n_2, \ldots, n_k$ toate numerele naturale strict mai mici ca *n* si prime cu *n*. Demonstrati ca are loc inegalitatea : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots + n_k^2 \geq k \cdot \frac{n^2}{4}$

prof. Ionut Ivăanescu, Revista “Sfera Matematicii“ nr. 13

Problema 2 (20puncte)

Se consideră numerele reale nenule $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se demonstreze că există un număr irational *a* astfel încât numerele $a \cdot x_1$, $a \cdot x_2$, … , $a \cdot x_n$ să fie toate iraționale.

Gazeta Matematica nr. 7 / 1979

Probleme selectate si propuse de prof. Ionut Ivănescu, Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE EVALUARE –CLASA a IX-a

ParteaI :1) c 2) d 3) a 4) b 5) d

Parteaa II-a:

1) Avem urmatoarea egalitate: $\{ n_1, n_2, \dots , n_k\} = \{n - n_1, n - n_2, \dots , n - n_k\}$……4 p

Deci $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n - n_1 + n - n_2 + \dots + n - n_k \Longrightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_k = \frac{k\cdot n}{2}$….2 p

Presupunem ca $n_1 < n_2 < \dots < n_k \Longrightarrow n - n_1 > n - n_2 > \dots > n - n_k$ ……….............2 p

Conform inegalitatii lui Cebasev avem:

$$\frac{n_1+n_2+\dots+n_k}{k}\cdot\frac{n-n_1+n-n_2+\dots+n-n_k}{k}\geq\frac{n_1(n-n_1)+n_2(n-n_2)+\dots+n_k(n-n_k)}{k}$$ …4p

$$\frac{\frac{nk}{2}}{k}\cdot\frac{\frac{nk}{2}}{k}\geq\frac{n\cdot(n_1+n_2+\dots+n_k)-(n_1^2+n_2^2+\dots+n_k^2)}{k}$$ 2p

$$\frac{n^2}{4}\geq\frac{n\cdot\frac{n\cdot k}{2}-(n_1^2+n_2^2+\dots+n_k^2)}{k}$$ …………………………………………..2p

$$\frac{k\cdot n^2}{4}\geq\frac{k\cdot n^2}{2}-(n_1^2+n_2^2+\dots+n_k^2)$$ ……………………………………………………….2p

$$n_1^2+n_2^2+\dots+n_k^2\geq\frac{k\cdot n^2}{4}$$ ……………………………………………………………………..2p

2) Fie $(p_i)_{i\geq1}$ sirul numerelor prime si $\alpha_i = \sqrt{p_i} \Longrightarrow \alpha_i \in \mathbb{R} - Q$…………………………2p

Formam urmatorul table infinit :…………………………………………………2p

$$\alpha_1\cdot x_1 , \alpha_1\cdot x_2 , \dots\dots, \alpha_1\cdot x_{n-1} , \alpha_1\cdot x_n$$
$$\alpha_2\cdot x_1 , \alpha_2\cdot x_2 , \dots\dots, \alpha_2\cdot x_{n-1} , \alpha_2\cdot x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_m\cdot x_1 , \alpha_m\cdot x_2 , \dots\dots, \alpha_m\cdot x_{n-1} , \alpha_m\cdot x_n$$ …………… 2p

Presupunem prin absurd ca nu ar fi adevarata concluzia problemei.
Aceasta inseamna ca pe fiecare linie exista cel putin un numar rational ……………..2p
Avand o infinitate de linii si doar n coloane, deducem ca va exista cel putin o coloana care sa contina doua numere rationale. Fie aceasta coloana q ……….. 2p
Cele doua numere rationale vor fi $\alpha_i\cdot x_q$ si $\alpha_j\cdot x_q$………………………………… 1p

$$\frac{\alpha_i\cdot x_q}{\alpha_j\cdot x_q}=\frac{\alpha_i}{\alpha_j}=\frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_j}}$$ ……………………………………………….…….. 2p

Cum $\frac{\alpha_i\cdot x_q}{\alpha_j\cdot x_q} \in Q \Longrightarrow \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_j}} \in Q \Longrightarrow \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_j}}=\frac{r}{s}$, cu s, r $\in \mathbb{N}$, $s \neq 0$ si $(r,s) = 1$ ……..2p
$p_i \cdot s^2 = p_j\cdot r^2 \Longrightarrow p_i \mid r$ si $p_j \mid s \Longrightarrow r = a\cdot p_i$ si $s = b\cdot p_j$, cu a, b $\in \mathbb{N}$ …………..…… 2p
Deci $p_i \cdot b^2 \cdot p_j^2 = p_j\cdot a^2 \cdot p_i^2 \Longrightarrow p_j \mid a \Longrightarrow p_j \mid r$ ………………………..……….……….. 2p
Asadar $p_j \mid r$ si $p_j \mid s$ – contradictie cu $(r,s) = 1$ ……………………………….…………1p