CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” - EDIȚIA a XIII-a

BĂILEȘTI, 12 MARTIE 2016

CLASA a VII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Dacă $S = \frac{401}{2} + \frac{1201}{6} + \frac{2401}{12} + \cdots + \frac{48001}{240}$, atunci numărul $16 \cdot S$ este egal cu:

a) 45000 b) 60050 c)48015 d) 30030

2) Valoarea maximă a expresiei algebrice $E(x) = -x^2 + 6x + 1$ este :

a) 11 b) 6 c)10 d) 7

3) Dacă x și y sunt numere reale astfelca $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$, valoarea expresiei $x^2 - y^2$este:

a) 3 b) 5 c) 6 d) -2

4) În triunghiul ABC, AB=13 cm, AC=14 cm, BC= 15 cm, M este mijlocul laturii(BC). Pătratul lungimii medianei AM este egal cu :

a) 144,1 b) 156,75 c) 126,25 d) 196

5)Fie ABCD un trapez cu $AB||CD$, $AB = 34\ cm, BC = 12\sqrt{3}\ cm, CD = 10\ cm$ și $AD = 12\ cm$. Aria trapezului este egală cu:

a) $264 cm^2$ b) $220 cm^2$ c) $216\sqrt{6} cm^2$ d) $132\sqrt{3} cm^2$

Probleme propuse de Marian Firicel, Calafat

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Fie ABC un triunghi, punctele D și E pe latura (BC), $D \in (BE), BD = DE = EC$ și F simetricul lui A față de D.

a) Arătați că$4 \cdot AB = 3 \cdot FL$, unde $\{L\} = EF \cap AC$

b) Dacă $AE \cap CF = \{K\}$, calculați valoarea raportului dintre aria patrulaterului LEKC și aria triughiului ABC.

Prof. Doina Firicel, Calafat

Problema 2 (20 puncte)

Să se demonstreze inegalitatea: $\sqrt{5x^2} + \sqrt{7x^2 + 1} + \sqrt{6x^2 + 2} \leq 3 \cdot (3x^2 + 1)$, pentru orice număr real x.

Sfera Matematicii nr. 1-2 / 2012

Timp de lucru: 2 ore. Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE EVALUARE - CLASA a VII-a

PARTEA I

SUB. 1 : C SUB. 2 : C SUB. 3 :D SUB. 4 : C SUB. 5 : D

PARTEA a II –a

PROBLEMA 1

Diagonalele patrulaterului ABFE se injumatatesc, ABFE este paralelogram, deci EF||AB si EF=AB………………………………………………………………………………………(**3p)**

In ΔCBA, EL||AB si conform teoremei fundamentale a asemanarii

$\Rightarrow \Delta CEL \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{EL}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow EL = \frac{1}{3} AB$ …………………………………………………**(4p)**

Atunci FL=FE+EL=AB+$\frac{1}{3} AB = \frac{4}{3} AB$, deci $3 \cdot FL = 4 \cdot AB$ ………………………… (**3p)**

a) In $\Delta ABE, AD - mediana \Rightarrow \mathcal{A}$ABD=$\mathcal{A}$ADE iar in $\Delta ADC, AE - mediana \Rightarrow \mathcal{A}$ADE=$\frac{2}{3}\mathcal{A}$ABC (1) (**2p)**

Din $\Delta CEL \sim \Delta CBA$ cu raportul de asemanare $\frac{1}{3} = k$, atunci $\mathcal{A}$CEL/$\mathcal{A}$CBA=$(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ deci $\mathcal{A}$CEL=$\frac{1}{9} \cdot$ $\mathcal{A}$ABC ……………………………………………………………………………(**3p)**

Analog , in ΔCBF , EK||BF (AE||BF din paralelogramul ABFE)$\Rightarrow k = \frac{EC}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathcal{A}$CEK=$\frac{1}{9}\mathcal{A}$CBF=$\frac{1}{9}$ $\mathcal{A}$ABC (se demonstreaza usor ca $\Delta ABC \equiv \Delta FBC$, deci $\mathcal{A}$ABC=$\mathcal{A}$FBC**)…(3p)**

În concluzie $\mathcal{A}$CEK+$\mathcal{A}$CEL=$\mathcal{A}$LEKC=$\frac{2}{9}\mathcal{A}$ABC, deci raportul cautat este $\frac{2}{9}$ ……………………………………(**2p)**

PROBLEMA 2

Aplicând inegalitatea mediilor obținem:

(1) $\sqrt{5x^2} \le \frac{5x^2+1}{2}$,…………………………………………..…………5p

(2) $\sqrt{7x^2+1} \le \frac{7x^2+2}{2}$,…………….………………………..…...….5p

(3) $\sqrt{6x^2+2} \le \frac{6x^2+3}{2}$,……………………………………………..…….5p

Se aduna (1) cu (2) si (3)

$\sqrt{5x^2} + \sqrt{7x^2+1} + \sqrt{6x^2+2} \le 3 \cdot (3x^2+1)$…………………………….…….5p