**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA a XIII-a**

**BĂILEȘTI, 12 MARTIE 2016**

**CLASA a-X-a**

**Partea I (50 puncte)**

*Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:*

**1.** Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[3]{x-4}+\sqrt{5-x}=1$ este:

a) 0 b) 9 c) 5 d) 1

**2.** Calculând $arctg\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ obținem:

a) $-\dfrac{5\pi}{12}$ b) $\dfrac{5\pi}{12}$ c) $\dfrac{\pi}{12}$ d) $-\dfrac{\pi}{12}$

**3.** Numărul soluțiilor întregi ale ecuației $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right)\right)<1$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) nici una

**4.** Numărul $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ este egal cu:

a) $-2$ b) 2 c) 14 d) 10

**5.** Dacă $a,b,c\in(0,\infty)-\{1\}$ și $P=a^{\lg\frac{b}{c}}\cdot b^{\lg\frac{c}{a}}\cdot c^{\lg\frac{a}{b}}$ atunci:

a) $P=1$ b) $P=10$ c) $P=0$ d) $P=2$

**Partea a II-a (40 puncte)**

*Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete*

**Problema 1 (20puncte)**

Să se determine $n\in N, n\geq 2$ pentru care: $\sqrt[n]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[n]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[n]{144}$.

*Revista Sfera Matematicii, nr.1/2013*

**Problema 2 (20puncte)**

a) Fie $\mathrm{a,b,c}\in[2,\infty)$. Se demonstreze că:

$$\log_{a+1}(2bc+1)+\log_{b+1}(2ca+1)+\log_{c+1}(2ab+1)\geq 6.$$

*Prof. Cătălin Cristea, Craiova*

b) Determinați numerele reale *k* cu proprietatea că:

$$(abc)^k+[(1-a)(1-b)(1-c)]^k\leq 1,\ \forall a,b,c\in(0;1).$$

*Prof. Leonard Giugiuc, prof. Daniel Sitaru, Dr. Tr. Severin*

***Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu: 10 puncte***

## Barem de notare-clasa a X-a

**I.** 1. c) 2. a) 3.d) 4. b) 5. a. )

**II.**

**Problema 1.**

Notând $a=\sqrt[n]{49+20\sqrt{6}}>0$ avem: $\sqrt[n]{144}=a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, de unde $n\in\{2,3,4,5,6,7\}$ ................ 5p

$n=4$ verifică relația ........................................................................................................ 5p

$n\in\{2,3,5,6,7\}$ nu verifică relația ................................................................................... 10p

**Problema 2.**

**a)** Cum $b,c\in[2,\infty)$ rezultă $(b-1)(c-1)\geq 1\Leftrightarrow bc\geq b+c$ ..................................... 2p

Prin urmare $2bc+1=bc+bc+1\geq bc+b+c+1=(b+1)(c+1)$ ........................................... 2p

Analog $2ca+1\geq(c+1)(a+1), 2ab\geq(a+1)(b+1)$. ........................................................ 2p

Avem:
$$\begin{aligned}&\log_{a+1}(2bc+1)+\log_{b+1}(2ca+1)+\log_{c+1}(2ab+1)\geq\log_{a+1}(b+1)(c+1)+\\&+\log_{b+1}(c+1)(a+1)+\log_{c+1}(a+1)(c+1)=\\&=\log_{a+1}(b+1)+\log_{b+1}(a+1)+\log_{c+1}(a+1)+\log_{a+1}(c+1)+\log_{c+1}(b+1)+\log_{b+1}(c+1)\geq 6.\end{aligned}$$

4p

**TOTAL 10p**

b) Aplicăm inegalitatea mediilor și obținem:

$\sqrt[3]{abc}\leq\dfrac{a+b+c}{3}$ *and* $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\leq\dfrac{3-(a+b+c)}{3}\ \forall\, a,b,c\in(0,1)$ .

*Adding up, we get* $\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\leq 1\ \forall\, a,b,c\in(0,1)$ .

*On the other hand,* $abc\in(0,1)$ *and* $(1-a)(1-b)(1-c)\in(0,1)\ \forall\, a,b,c\in(0,1)\Rightarrow$ $(abc)^k\leq\sqrt[3]{abc}$ *and* $[(1-a)(1-b)(1-c)]^k\leq\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\ \forall\, k\geq\dfrac{1}{3}$ *and* $\forall\, a,b,c\in(0,1)$ .

*From here,* $(abc)^k+[(1-a)(1-b)(1-c)]^k\leq 1\ \ \forall\, k\geq\dfrac{1}{3}$ *and* $\forall\, a,b,c\in(0,1)$ .

*Now consider the function* $f:R\to R,\ f(k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k-1}$ *. Since $f$ is the composite between a strictly increasing function and a strictly decreasing one, then $f$ is stricly decreasing.*

*On the other hand,* $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=1\Rightarrow f(k)>1\ \forall\, k<\dfrac{1}{3}$ *. So for any* $k<\dfrac{1}{3}$ *, if* $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ *, then we get* $(abc)^k+[(1-a)(1-b)(1-c)]^k>1$ .

*In conclusion, the range of $k$ is* $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$ .

**TOTAL 10p**

# Soluţii-clasa a X-a

**I.** 1. Notând $a=\sqrt[3]{x-4}$ și $b=\sqrt{5-x}$ avem $a+b=1$ și $a^3+b^2=1$ de unde $a\in\{-2,0,1\}\Leftrightarrow x\in\{-4,4,5\}$. Suma soluțiilor ecuației este 5.

**Răspuns corect c)**

2.

$$arctg\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=arctg\left(\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{3}}{1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{3}}\right)=arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=arctg\left(tg\frac{7\pi}{12}\right)=arctg\left(tg\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)\right)=-\frac{5\pi}{12}.$$

**Răspuns corect a)**

3. $x\in\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cap\square \Rightarrow x\in\phi$

**Răspuns corect d)**

4. Notând $x=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ obținem $x^3=-3x+14$, de unde găsim că $x=2$.

**Răspuns corect b)**

5. $\lg P=\lg\left(a^{\lg\frac{b}{c}}\cdot b^{\lg\frac{c}{a}}\cdot c^{\lg\frac{a}{b}}\right)=(\lg b-\lg c)\lg a+(\lg c-\lg a)\lg b+(\lg a-\lg b)\lg c=0$, deci $P=1$.

**Răspuns corect a)**