Olimpiada de Matematică - Etapa Locală

Maramureş – 28 februarie 2016

Clasa a VIII - a

1. Fie a,b,c∈ℕ care satisfac relația:

$$a + 2b + 3c + 21 = 4(\sqrt{a+1} - 1) + 6(\sqrt{2b+1} - 1) + 10(\sqrt{3c+1} - 1)$$

a) Determinați numerele a, b $și$ c.

b) Demonstrați că $\overline{abc}^{2016} + \overline{acb}^{2016}$ nu este pătrat perfect.

2. Fie x şi y numere reale astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 21 = 0$.

Arătaţi că $|2x - 2y + 7| \leq 4$.

(Supliment Gazeta Matematică nr. 12/2015)

3. a) Demonstraţi că $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}. = \dfrac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$ pentru orice număr natural n nenul .

b) Fie $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \dfrac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$, unde $n \in N^*$.

Determinaţi $n \in N^*$ pentru care $\sqrt{7} \cdot A_n = \sqrt{2016}$.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Considerăm punctele $E \in (BD)$ astfel încât $BD = 4 \cdot DE$ şi $E' \in (B'D'$ astfel încât $D'E' = 3 \cdot B'E'$. Dacă *M, N, P* şi *Q* sunt mijloacele muchiilor *AB, BC,* $D'C'$, respectiv $A'D'$, arătaţi că:

a) planele *(EPQ)* şi $(E'MN)$ sunt paralele;

b) dacă $BD' \cap (E'MN) = \{T\}$ şi $BD' \cap (EQP) = \{T'\}$, atunci $TT' = 2 \cdot BT$.

(Gazeta Matematică nr. 12/2015)

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Timp de lucru 3 ore

Barem de corectare - clasa VIII

Problema 1

Fie a,b,c∈ℕ care satisfac relaţia:

$$a + 2b + 3c + 21 = 4(\sqrt{a+1} - 1) + 6(\sqrt{2b+1} - 1) + 10(\sqrt{3c+1} - 1)$$

a) Determinaţi numerele a, b *și* c.

b) Demonstraţi că $\overline{abc}^{2016} + \overline{acb}^{2016}$ nu este pătrat perfect.

Soluţie:

a) $\left(\sqrt{a+1} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{2b+1} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{3c+1} - 5\right)^2 = 0$ 2p

$a = 3, b = 4, c = 8$ 2p

b) $U(348^{2016} + 384^{2016}) = U(8^{2016} + 4^{2016}) = U(6 + 6) = 2 \neq pp$ 3p

Problema 2

Fie x şi y numere reale astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 21 = 0$.

Arătaţi că $|2x - 2y + 7| \leq 4$.

Soluţie. Se aduce la forma $(2x+4)^2 + (2y-3)^2 = 4$. 2 p

Se deduce $(2x+4)^2 \leq 4$. şi $(2y-3)^2 \leq 4$. 1 p

Se obţine $|2x+4| \leq 2$. şi $|2y-3| \leq 2$. 1 p

Deducem $-2 \leq 2x+4 \leq 2$ şi $-2 \leq 2y-3 \leq 2$

şi avem $-2 \leq 2x+4 \leq 2$ (1) şi $-2 \leq -2y+3 \leq 2$ (2) 2 p

Însumând (1) şi (2), $-4 \leq 2x - 2y + 7 \leq 4$

şi se finalizează $|2x - 2y + 7| \leq 4$ 1 p

Problema 3

a) Demonstraţi că $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}. = \dfrac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$ pentru orice număr natural n nenul .

b) Fie $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \dfrac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$, unde $n \in N^*$.

Determinaţi $n \in N^*$ pentru care $\sqrt{7} \cdot A_n = \sqrt{2016}$.

Soluţie

a) Se ridică la pătrat $2n+\sqrt{4n^2-1}=\dfrac{2n+1+2\sqrt{(2n+1)(2n-1)}+2n-1}{2}$. 2 p

Finalizare 1 p

b) Se obţine $A_n=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ 1 p

Deducem $A_n=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{15}}{7-5}+\ldots+\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2n+1-(2n-1)}\right)$ 1 p

Deci $\sqrt{7}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)=\sqrt{2016}$, de unde $\sqrt{2n+1}-1=24$, astfel $n=312$. 2 p

Problema 3

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Considerăm punctele $E\in(BD)$ astfel încât $BD=4\cdot DE$ şi $E'\in(B'D'$ astfel încât $D'E'=3\cdot B'E'$. Dacă *M*, *N*, *P* şi *Q* sunt mijloacele muchiilor *AB*, *BC*, $D'C'$, respectiv $A'D'$, arătaţi că:

a) planele *(EPQ)* şi $(E'MN)$ sunt paralele;

b) dacă $BD'\cap(E'MN)=\{T\}$ şi $BD'\cap(EQP)=\{T'\}$, atunci $TT'=2\cdot BT$.

Soluţie.

a) Se demonstrează că *MN* // *PQ*. 2 p

Se obţine $HE'//JE$, unde *H* mijlocul lui (*MN*) şi *J* este mijlocul lui (*PQ*)

(sau $ME'//PE$ sau $NE'//QE$)

(calcul sau congruenţe de triunghiuri) 2 p

Finalizare 1 p

b) Deducem $3BT=D'T$ sau analoage . 1 p

Finalizare 1 p