# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ - 28 FEBRUARIE 2016

## CLASA A X –A

1. Se consideră funcţia injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia $f(x)\cdot f(1-x)=f(ax+2016), \forall x\in\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că :
   a) $a=0$
   b) $f(-2015)=1$
   c) $f$ nu este surjectivă.

2.
   a) Să se arate că $x-2+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x-2}}\geq 5, \forall x\in(2,\infty)$.
   b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $10+\log_3\left(\dfrac{x}{x^3+54}\right)=x+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x-2}}$ .

3. Fie $S$ aria triunghiului $ABC$ şi $a,b,c$ lungimile laturilor sale.
   a) Folosind eventual, faptul că funcţia $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ este convexă, să se arate că $\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{3}$
   b) Să se demonstreze că $bc\cdot\sin\dfrac{A}{2}+ca\cdot\sin\dfrac{B}{2}+ab\cdot\sin\dfrac{C}{2}\geq 2\sqrt{3}\cdot S$.

(Prelucrare, problema 27173, G.M. 1/2016)

***Notă:***
*Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu note de la 0 la 7.*
*Timp de lucru 3 ore.*
*Subiectele au fost propuse şi selectate de către:*
*prof. Boroica Gabriela- Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu”, Baia Mare*
*prof. Fărcaş Natalia - Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu”, Baia Mare*
*prof. Muşuroia Nicolae- Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai” Baia Mare*
*prof. Pop Radu – Seminarul Teologic Liceal „Sf. Iosif Mărturisitorul”, Baia Mare*

Barem – Clasa a X-a

1. a) $\begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)f(1)=f(2016) \\ x=1 \Rightarrow f(1)f(0)=f(a+2016) \end{cases} \Rightarrow f(2016)=f(a+2016) \Rightarrow a=0$

   b) $x=2016 \Rightarrow f(2016)f(-2015)=f(2016) \Rightarrow f(2016)\left[f(-2015)-1\right]=0$

   Dacă $f(2016)=0 \Rightarrow f(x)f(1-x)=0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ există cel puţin două numere reale distincte pentru care f se anulează, deci contradicţie cu injectivitatea funcţiei f.
   Rămâne $f(-2015)=1$ .

   c) Demonstrăm că $0\notin \operatorname{Im} f$ . Presupunem că $\exists t\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(t)=0$. Din relaţia dată rezultă $f(t)f(1-t)=f(2016) \Rightarrow f(2016)=0$, fals. Deci $0\notin \operatorname{Im} f$ şi prin urmare $f$ nu este surjectivă.

2. a) Aplicăm inegalitatea mediilor: $x-2+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x-2}} \geq 5\sqrt[5]{(x-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^4}=5$.

   b) $8+\log_3\left(\dfrac{x}{x^3+54}\right)\geq 5 \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x}{x^3+54}\right)\geq -3 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^3+54}\geq\dfrac{1}{27}$. Pentru

   $x>2 \Rightarrow (x+6)(x-3)^2\leq 0$. Egalitatea are loc pentru $x-2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}} \Leftrightarrow x=3$. Deci $x=3$.

3. a) Din convexitatea funcţiei $f$ rezultă: $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\geq\dfrac{1}{\cos\left(\frac{A+B+C}{6}\right)}$, deci

   $\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{3}$.

   b) $bc\cdot\sin\dfrac{A}{2}+ca\cdot\sin\dfrac{B}{2}+ab\cdot\sin\dfrac{C}{2}=bc\cdot\sin A\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin A}+ac\cdot\sin B\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\sin B}+ba\cdot\sin C\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\sin C}$

   $=S\left[\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right]\geq 2\sqrt{3}\cdot S$.