OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 28 FEBRUARIE 2016

CLASA A XII –A

1. Se consideră grupurile $\left(\mathbb{C}^*,\cdot\right)$şi $\left(G,\cdot\right)$ unde $G=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\right| a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2\neq 0\right\}$.

a) Să se arate că grupurile $\left(\mathbb{C}^*,\cdot\right)$şi $\left(G,\cdot\right)$ sunt izomorfe.

b) Arătaţi că, pentru fiecare n număr natural nenul, există un subgrup cu n elemente al grupului $\left(G,\cdot\right)$ şi să se determine acest subgrup.

2. Fie $a>0, a\neq 1$. Calculaţi integrala $I=\int_0^1 a^{x^3+3x}\cdot\ln a^{x^5+4x^3+3x}dx$.

S.G.M 12/2015

3. a) Să se determine primitivele funcţiei $f:(0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x^2}$.

b) Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval neredus la un singur punct şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie strict descrescătoare pe I şi care admite primitive pe I. Există funcţii $g:I\to I$ care admit primitive pe I astfel încât $g\left(g(x)\right)=f(x), \forall x\in I$?

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse şi selectate de către:
prof. Boroica Gheorghe, C.N. ”Gh. Şincai”
prof. Bob Robert, C.N. ”V. Lucaciu”
prof. Ocean Cristina, L.T. ”E. Racoviţă”.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 28 FEBRUARIE 2016

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII –A

1.a) Functia $f: C^* \to G,\ f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ este izomorfism de grupuri.

- Definiția lui f (sau a lui f^{-1}) **1p**
- f bijectivă **1p**
- f morfism **1p**

b) Singurul subgrup H al lui $(C^*,\cdot)$ și care are n elemente este cel al rădăcinilor de ordinul n ale unității **1p**

Folosind a), rezultă că și G are un subgrup cu n elemente **1p**

Din $H = U_n = \{z \in \mathbb{C}^* | z^n = 1\}$, deducem că $f(H) = \left\{ f\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) | k \in \overline{0, n-1} \right\} =$
$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} | k \in \overline{0, n-1} \right\}$ este subgrupul căutat. **2p**

2.

$I = \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot (x^5 + 4x^3 + 3x)\, lna\, dx = \int_0^1 a^{x^3+3x} [x^3(x^2+1) + 3x(x^2+1)]\, lna\, dx =$

$\int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot (x^2+1)(x^3+3x)\, lna\, dx =$ **2p**

$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(a^{x^3+3x}\right)' \cdot (x^3+3x)\, dx$ **2p**

$= \frac{1}{3} a^{x^3+3x} \cdot (x^3+3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot (x^2+1)\, dx$ **1p**

$= \frac{4a^4}{3} - \frac{1}{3lna} \cdot a^{x^3+3x} \Big|_0^1$ **1p**

$= \frac{4a^4}{3} - \frac{a^4}{3lna} + \frac{1}{3lna} = \frac{1}{3lna}(4a^4 lna - a^4 + 1)$ **1p**

3. a) Funcția f fiind continuă are primitive pe $(0,1]$. Pentru $x \in (0,1)$ avem:

$\int \frac{arcsinx}{x^2} dx = -\int \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot arcsinx\, dx = -\frac{1}{x} arcsinx + \int \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-x^2}} dx =$ **2p**

$$= -\frac{1}{x} arcsinx + \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} dx = -\frac{1}{x} arcsinx - \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} dx$$

$= -\frac{1}{x} \cdot arcsinx - ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) + C$ **1p**

Atunci funcția $F: (0,1] \to R, F(x) = -\frac{1}{x} \cdot arcsinx - ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ este o primitivă pentru f chiar pe $(0,1]$, deci $\int f(x) dx = F(x) + C$ **1p**

b) Presupunem că $\exists$ g cu proprietatea cerută. Atunci g are Proprietatea lui Darboux pe I.
Fie a,b $\in I$ astfel încât $g(a) = g(b) \Rightarrow g\big(g(a)\big) = g\big(g(b)\big) \Rightarrow f(a) = f(b) \underset{f\ inj}{\Longrightarrow} a = b,$ deci g este injectivă. **1p**

Din g injectivă și g are P.D $\Rightarrow$g e strict monotonă **1p**

$\Rightarrow$ $g \circ g$ strict crescătoare $\overset{ip}{\Rightarrow}$f strict crescătoare, contradicție **1p**