Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, pentru care $\frac{10}{3+i}=a+ib$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $\left(f(1)\right)^{2016}+\left(f(0)\right)^{2016}$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $6^{x^2-3x+5}=216$.

5p **4.** Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 5 elevi din totalul de 6 elevi pe care îi are la dispoziţie un antrenor.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$ și $B(2m+1,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul $C(10,0)$ este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Calculați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=O_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculaţi $0*1*2*3$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $a*a*2016=2016$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1,2016]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^2\left(f(x)+3x^2-2\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-x^3+3x^2+x\right)e^x dx=2e-1$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{1-a}^{1+a} f(x)\,dx=0$, pentru orice număr real a.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{10}{3+i}=\frac{10(3-i)}{3^2-i^2}=3-i$	**3p**
	$3-i=a+ib\Rightarrow a=3,\ b=-1$	**2p**
2.	$f(1)=0,\ f(0)=-1$	**2p**
	$\left(f(1)\right)^{2016}+\left(f(0)\right)^{2016}=0^{2016}+(-1)^{2016}=1$	**3p**
3.	$6^{x^2-3x+5}=6^3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	$C_6^5=\frac{6!}{5!(6-5)!}=$	**3p**
	$=6$	**2p**
5.	Punctul C este mijlocul segmentului $AB\Rightarrow 10=\frac{5+2m+1}{2}$	**3p**
	$2m+6=20\Rightarrow m=7$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	$\cos C=\frac{12}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1$	**2p**
b)	$A-I_3=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$(A-I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+2y+4z\\y+3z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$	**2p**
	$x=2,\ y=-5,\ z=2$	**3p**

2.a)	$x * y = xy - x - y + 1 + 1 =$	**2p**
	$= x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$0 * 1 * 2 * 3 = (0 * 1) * 2 * 3 = 1 * (2 * 3) =$	**3p**
	$= 1$	**2p**
c)	$a * a = (a-1)^2 + 1 \Rightarrow a * a * 2016 = 2015(a-1)^2 + 1$	**2p**
	$2015(a-1)^2 + 1 = 2016 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0$ sau $a = 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$	**2p**
	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ și $f'(2) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$f(1) = 2$, $f'(1) = -1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = -x + 3$	**3p**
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, +\infty)$	**2p**
	Cum $f(1) = 2$ și $f(2016) = \frac{2017}{2016}$, obținem $\frac{2017}{2016} \le f(x) \le 2$, pentru orice $x \in [1, 2016]$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 \left(f(x) + 3x^2 - 2 \right) dx = \int_0^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right\vert_0^2 =$	**3p**
	$= 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 \left(f(x) - x^3 + 3x^2 + x \right) e^x \, dx = \int_0^1 (2+x) e^x \, dx =$	**2p**
	$= (1+x)e^x \Big\vert_0^1 = 2e - 1$	**3p**
c)	$\int_{1-a}^{1+a} f(x) dx = \left. \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right) \right\vert_{1-a}^{1+a} =$	**2p**
	$= 2a + 2a^3 - 2a^3 - 6a + 4a = 0$, pentru orice număr real a	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $2a_{10} = a_5 + a_6 + 36$.

5p **2.** Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$ cu dreapta de ecuație $y = x - 1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \log_2\left(x^2 - 1\right) = 4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(1,4)$ şi $C(5,1)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Arătaţi că $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \operatorname{ctg}^2 x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & 2x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det\left(M(0)\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $2M(x) - M(-x) = M(3x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n, 2n-1)$ și $B\left(n^2, 2n^2 - 1\right)$, unde n este număr natural, $n \geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.

5p **a)** Calculați $1 \circ \frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \ldots \circ \frac{2016}{1008}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.

5p **a)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a_1+9r)=a_1+4r+a_1+5r+36 \Leftrightarrow 9r=36$	**3p**
	$r=4$	**2p**
2.	$x^2+3x-1=x-1 \Leftrightarrow x^2+2x=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=0$	**2p**
3.	$\log_2 \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x+1}=4 \Rightarrow (x-1)^2=16$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifra unităților zero, 4 numere cu cifra zecilor cinci și cifra unităților număr par nenul și 4 numere cu cifra unităților cinci și cifra zecilor număr par, deci sunt 17 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{17}{90}$	**2p**
5.	$A(1,1)$, $B(1,4) \Rightarrow AB \parallel Oy$ și $A(1,1)$, $C(5,1) \Rightarrow AC \parallel Ox$, deci ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC este mijlocul laturii BC și are coordonatele $\left(3,\dfrac{5}{2}\right)$	**3p**
6.	$1+\cos 2x=2\cos^2 x$	**2p**
	$1-\cos 2x=2\sin^2 x \Rightarrow \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\dfrac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}=\text{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=3+(-2)+0-0-(-1)-2=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$2M(x)-M(-x)=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&6&2\\2x&4x-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-x&-2x-1&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3x&6x-1&1\end{pmatrix}=M(3x)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ n & 2n-1 & 1\\ n^2 & 2n^2-1 & 1\end{vmatrix}=n(n-1)$, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=\frac{n(n-1)}{2}$	**3p**
	Cum pentru orice număr natural n, $n\ge 2$, numerele $n-1$ și n sunt consecutive, produsul lor este număr par, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}$ este număr natural	**2p**
2.a)	$1\circ\frac{1}{3}=6\cdot 1\cdot\frac{1}{3}-2\cdot 1-2\cdot\frac{1}{3}+1=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$x\circ e=6xe-2x-2e+1=6ex-2e-2x+1=e\circ x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ e=x\Leftrightarrow(3x-1)(2e-1)=0$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}=\left(\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\ldots\circ\frac{335}{1008}\right)\circ\frac{1}{3}\circ\left(\frac{337}{1008}\circ\frac{338}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}\right)=\frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^4+3\right)-x\cdot 4x^3}{\left(x^4+3\right)^2}=\frac{3\left(1-x^4\right)}{\left(x^4+3\right)^2}=$	**3p**
	$=-\frac{3\left(x^4-1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{3}x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**1p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f crescătoare pe $[-1,1]$ și $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{4}$, $f(1)=\frac{1}{4}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem $-\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{4}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x-2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=2$, deci $F(x)=(x-1)e^x-2x+2$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(x^2e^x-2x\right)dx=x^2e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^xdx-x^2\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e-3$	**2p**
c)	$\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)=(x-1)\left(e^x-2\right)$	**3p**
	$(x-1)\left(e^x-2\right)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi numerele naturale a, b şi c, ştiind că $2016 = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-3$. Determinaţi abscisele punctelor care au ordonata egală cu 1 și aparțin graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+10}-2x=4-x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor mai mică sau egală cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ şi $B(3,5)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.

5p **6.** Perimetrul triunghiului dreptunghic ABC este egal cu 72. Determinaţi lungimea ipotenuzei BC, știind că $\sin C = 0{,}8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = xy+x+y$.

5p **1.** Calculaţi $\left(-\sqrt{2}\right)\circ\sqrt{2}$.

5p **2.** Arătaţi că $x\circ y=(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2\circ x=-1$.

5p **4.** Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **5.** Demonstrați că numărul $n\circ n$ este multiplu de 8, pentru orice număr natural par n.

5p **6.** Dați un exemplu de două numere iraționale a și b, pentru care $a\circ b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **1.** Calculaţi $\det\left(A(2)\right)$.

5p **2.** Arătaţi că $A(1)+A(3)=2A(2)$.

5p **3.** Determinați numărul natural n, pentru care $\left|\det\left(A(n)\right)\right|=1-2n$.

5p **4.** Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $\det\left(xA(x)-2I_2\right)\geq 0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **5.** Demonstrați că matricea $A\left(x^2\right)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **6.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $2X+3A(1)=4A(2)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7^1$	**2p**
	$a=5$, $b=2$, $c=1$	**3p**
2.	$f(x)=1\Leftrightarrow x^2-1=0$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$	**2p**
3.	$\sqrt{3x+10}=4+x\Rightarrow x^2+5x+6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=-2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 54 de numere naturale de două cifre care au suma cifrelor mai mică sau egală cu 10, deci sunt 54 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{54}{90}=\dfrac{3}{5}$	**2p**
5.	B este mijlocul segmentului AC, unde $C(x_C,y_C)$ este simetricul punctului A față de punctul B, deci $3=\dfrac{-1+x_C}{2}\Leftrightarrow x_C=7$	**3p**
	$5=\dfrac{2+y_C}{2}\Leftrightarrow y_C=8$	**2p**
6.	$\sin C=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow AB=\dfrac{4}{5}BC$	**1p**
	$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow AC=\dfrac{3}{5}BC$	**2p**
	$\dfrac{4}{5}BC+\dfrac{3}{5}BC+BC=72\Leftrightarrow BC=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$\left(-\sqrt{2}\right)\circ\sqrt{2}=\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=$	**3p**
	$=-2$	**2p**
2.	$x\circ y=xy+x+y+1-1=$	**2p**
	$=x(y+1)+(y+1)-1=(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
3.	$\left(x^2+1\right)(x+1)-1=-1\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x+1)=0$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
4.	$(x\circ y)\circ z=\big((x+1)(y+1)-1\big)\circ z=\big((x+1)(y+1)-1+1\big)(z+1)-1=(x+1)(y+1)(z+1)-1$	**2p**
	$x\circ(y\circ z)=x\circ\big((y+1)(z+1)-1\big)=(x+1)\big((y+1)(z+1)-1+1\big)-1=(x+1)(y+1)(z+1)-1=$ $=(x\circ y)\circ z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea „$\circ$” este asociativă	**3p**

5.	$n=2k,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow n\circ n=4k(k+1)$	**3p**
	Deoarece k și $k+1$ sunt numere naturale consecutive, numărul $k(k+1)$ este multiplu de 2, deci numărul $n\circ n$ este multiplu de 8	**2p**
6.	$a\circ b=(a+1)(b+1)-1\in\mathbb{N}\Rightarrow(a+1)(b+1)\in\mathbb{N}^*$	**3p**
	De exemplu, $a=\sqrt{2}-1$ și $b=2\sqrt{2}-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3$	**3p**
2.	$A(1)+A(3)=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=2A(2)$	**2p**
3.	$A(n)=\begin{pmatrix}n&n-1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(n))=n+1$	**2p**
	Deoarece $n\in\mathbb{N}$, $\lvert n+1\rvert=1-2n$ implică $n+1=1-2n$, de unde obținem $n=0$, care convine	**3p**
4.	$xA(x)-2I_2=\begin{pmatrix}x^2-2&x^2-x\\x&2x-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(xA(x)-2I_2)=(x-1)(x-2)(x+2)$	**3p**
	$(x-1)(x-2)(x+2)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-2,1]\cup[2,+\infty)$	**2p**
5.	$A(x^2)=\begin{pmatrix}x^2&x^2-1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x^2))=\begin{vmatrix}x^2&x^2-1\\1&2\end{vmatrix}=x^2+1$	**3p**
	$x^2+1\neq 0$ pentru orice număr real x, deci $A(x^2)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p**
6.	$2X+3\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2X+\begin{pmatrix}3&0\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4\\4&8\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&2\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale m, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu -3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x=\log_x 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $AB+BC=AC$.

5p **6.** Determinați $a\in(0,\pi)$, știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ m & m & 1\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinați numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2a+1)+(2b-1)i=0$ Cum a și b sunt numere reale, obținem $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=m^2-4$ $-\frac{m^2-4}{4}=-3 \Leftrightarrow m^2-16=0 \Leftrightarrow m=-4$ sau $m=4$	**2p** **3p**
3.	$\log_3 x=\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow (\log_3 x+1)(\log_3 x-1)=0$ $x=\frac{1}{3}$ sau $x=3$, care verifică ecuaţia	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Pătratele perfecte de o cifră sunt $0, 1, 4$ şi 9, deci sunt $3\cdot 4=12$ numere naturale de două cifre care au ambele cifrele pătrate perfecte, adică sunt 12 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**1p** **2p** **2p**
5.	Punctele A, B şi C sunt coliniare, deci $m_{AB}=m_{BC}$ $\frac{-3-a}{0+1}=\frac{1+3}{1-0} \Leftrightarrow a=-7$	**2p** **3p**
6.	$\sin^2\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos a+\cos^2 a+\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin a+\sin^2 a=2 \Leftrightarrow 2-2\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=2$ Cum $a\in(0,\pi)$, din relaţia $\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=0$, obţinem $a=\frac{6\pi}{7}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$ $=0$	**3p** **2p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&m+1\\m&m&m+1\\1&m&m+1\end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix}2&1&1\\m-2&m-1&0\\-1&m-1&0\end{vmatrix}=(m+1)(m-1)^2$ Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m))\neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p** **3p**

c)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A(0))=1\neq 0$, $(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&9&-7\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*y=xy-4x-4y+16+4=$	**2p**
	$=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*4=4*y=4$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2016=((1*2*3)*4)*(5*\ldots*2016)=4*(5*\ldots*2016)=4$	**3p**
c)	$(a-4)(b-4)(c-4)=62$, unde a, b și c sunt numere naturale și $a<b<c$	**1p**
	$\begin{cases}a-4=-2\\b-4=-1\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=35\end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases}a-4=1\\b-4=2\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\\c=35\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=0$	**3p**
	Coordonatele punctului sunt $x=-\frac{1}{2}$ și $y=-4$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$	**3p**
	$=\frac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)dx=\int_2^4\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}dx=\int_2^4\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=-\frac{1}{x}\ln x\Big\vert_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big\vert_1^e=1-\frac{2}{e}$	**2p**
c)	Cum $x\in[1,e]$, obținem $0\le\ln x\le1$, deci $0\le\frac{\ln x}{x^{n+1}}\le\frac{1}{x^{n+1}}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$0\le\int_1^e\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx\le\int_1^e\frac{1}{x^{n+1}}dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$	**3p**