Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și $b_2 = 8$. Calculați $b_1 + b_2 + b_3$.

5p **2.** Determinați numerele reale a pentru care $f(a-5) = f(5)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 2^x = 4^{x-2}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre se pot forma cu cifrele din mulțimea $A = \{0,2,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ și $B(-1,4)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle ABC) = 30°$, $AB = 8$ și $BC = 12$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $d(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $d(0)$.

5p **b)** Demonstrați că $d(x) = -2(x-1)(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt două numere reale diferite astfel încât $d(x) = d(y)$, atunci $x + y = 0$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $A + I_2$.

5p **b)** Arătați că inversa matricei $M = A + I_2 + A\cdot A$ este matricea $-A$.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care avem $(A+I_2)(B+I_2) = 2I_2$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x\in(-\infty,0] \\ 1-x^3, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Calculați $f(-1) + f(1)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \geq 0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei este egală cu 4	**2p**
	$b_1+b_2+b_3=2+8+32=42$	**3p**
2.	$f(5)=6$, $f(a-5)=a^2-14a+46$	**2p**
	$a^2-14a+40=0 \Leftrightarrow a=4$ sau $a=10$	**3p**
3.	$2^{x+1}=2^{2x-4} \Leftrightarrow x+1=2x-4$	**3p**
	$x=5$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 3 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**3p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a celorlalte două cifre, în câte 4 moduri, deci se pot forma $3\cdot 4\cdot 4=48$ de numere	**2p**
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$M(2,1)$	**3p**
6.	Înălțimea din A a triunghiului ABC este de $\frac{1}{2}\cdot 8=4$	**2p**
	Aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{4\cdot 12}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$d(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0+6+3-0-3-4=$	**3p**
	$=2$	**2p**
b)	$d(x)=0+6+3(x+1)-0-2(x^2+2)-3(x+1)=-2x^2+2=$	**3p**
	$=-2(x^2-1)=-2(x-1)(x+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$-2(x-1)(x+1)=-2(y-1)(y+1) \Leftrightarrow x^2-y^2=0$	**2p**
	Cum $x\neq y$, din $(x-y)(x+y)=0$, obținem $x+y=0$	**3p**
2.a)	$A+I_2=\begin{pmatrix} 0+1 & 1+0 \\ -1+0 & 0+1 \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2 \Rightarrow M=A+I_2+(-I_2)=A$	**2p**
	Cum $A\cdot(-A)=(-A)\cdot A=I_2$, obținem că inversa matricei M este matricea $-A$	**3p**

c)	$(A+I_2)(B+I_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ x^2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x^2 & x+1\\ -1+x^2 & -x+1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x^2 & x+1\\ -1+x^2 & -x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}=\frac{\sqrt{1^2+3\cdot 1+5}}{1+2}=$	**3p**
	$=1$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}=$	**3p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=-2$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$f(-1)=-1$	**2p**
	$f(1)=0\Rightarrow f(-1)+f(1)=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2x+1)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x^3)=1$	**1p**
	Cum $f(0)=1$, obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în punctul $x=0$	**3p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p**
	Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f are semn constant pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ și $(1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$	**1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z = i(1+i)^2$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale m, ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ este intervalul $[-1,+\infty)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+2^{x+1}=4-2^x$.

5p **4.** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $M=\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$. Arătați că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi numerele reale $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin 2x=\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2015 & 2016 & x \\ 2015^2 & 2016^2 & x^2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(2016)\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(x)\right)=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)$ are valoarea minimă.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A\cdot A$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați inversa matricei $M=X(-3)\cdot X(-2)\cdot X(-1)\cdot X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot X(4)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{mx^2+4x-m}{x-1}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, pentru care dreapta de ecuaţie $y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+2a, & x<2 \\ ax+\log_2 x, & x\geq 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=0$, calculaţi $f(-1)\cdot f(4)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=i(1+i)^2=2i^2=$	**2p**
	$=-2$, deci partea reală a numărului complex z este egală cu -2	**3p**
2.	$-\frac{m^2-4}{4}=-1 \Leftrightarrow m^2-8=0$	**3p**
	$m=-2\sqrt{2}$ sau $m=2\sqrt{2}$	**2p**
3.	$2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0 \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(2^x+4\right)=0$	**3p**
	Deoarece $2^x>0$, soluția ecuației este $x=0$	**2p**
4.	$5, 15, 25, \ldots, 2005$ şi 2015 sunt numerele din mulţimea M care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10	**2p**
	În mulţimea M sunt 202 numere care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10	**3p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului MC	**2p**
	$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$	**2p**
	Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ sau $x=\pi$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2016)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2015 & 2016 & 2016\\ 2015^2 & 2016^2 & 2016^2\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(2016)\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2015 & 2016 & 2016\\ 2015^2 & 2016^2 & 2016^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(x)\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2015 & 2016 & x\\ 2015^2 & 2016^2 & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2015-x & 2016-x & x\\ 2015^2-x^2 & 2016^2-x^2 & x^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(2015-x)(2016-x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2015+x & 2016+x\end{vmatrix}=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$\det\left(A(x)\right)=x^2-(2015+2016)x+2015\cdot 2016$	**2p**
	$\det\left(A(x)\right)$ are valoarea minimă pentru $x=\frac{4031}{2}$	**3p**

2.a)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA\cdot A=$ $=I_2+(a+b)A=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**3p** **2p**
c)	$M=X\left((-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4\right)=X(4)$ Cum $X(4)\cdot X(-4)=X(0)=I_2$, inversa matricei M este matricea $X(-4)=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{mx^2+4x-m}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(m(x+1)+\frac{4x}{x-1}\right)=$ $=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f, pentru orice număr real m	**3p** **2p**
b)	$y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$ Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^2+4x-m}{x(x-1)}=m$, obținem $m=3$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{-x^2+4x+1}{x-1}-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{(x-1)(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x-3}{x-1}=-5$	**2p** **3p**
2.a)	$f(-1)=-\frac{1}{2}$ $f(4)=2\Rightarrow f(-1)\cdot f(4)=-1$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\frac{x}{2}+2a\right)=1+2a$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(ax+\log_2 x\right)=2a+1$ și $f(2)=2a+1$, deci funcția f este continuă în $x=2$, pentru orice număr real a Cum, pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**3p** **2p**
c)	$f(-1)\cdot f(4)=\left(-\frac{1}{2}+2a\right)(4a+2)=(4a-1)(2a+1)$ Deoarece f este continuă și pentru orice $a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ avem $f(-1)\cdot f(4)<0$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)>0,24$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+3$. Arătați că $f(6-x)=f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+4x-5}=x-1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{n} \mid n\in\mathbb{N},\ n<50\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(-4,4)$ și $C(3,-3)$. Verificați dacă punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB=5$ și $BD=6$. Calculaţi $\sin(\sphericalangle ADB)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+3$.

5p **1.** Calculați $2*(-4)$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **3.** Verificați dacă $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x*3^x=93$.

5p **5.** Demonstrați că numărul $\left(2n^2-2n-1\right)*\left(2n^2-2n-1\right)$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n.

5p **6.** Se consideră numărul real $a=1*(-3)*5*(-7)*9*(-11)*13*(-15)*17*(-19)$. Arătați că $a\in\left(\sqrt{288},\sqrt{290}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]=\left\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **1.** Verificați dacă $1\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$.

5p **2.** Demonstrați că $x+y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$.

5p **3.** Demonstrați că $xy\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$.

5p **4.** Verificați dacă $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}=9-4\sqrt{5}$.

5p **5.** Arătați că $\frac{1}{9-4\sqrt{5}}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$.

5p **6.** Dați exemplu de un număr $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$, astfel încât $0<x<\frac{1}{17}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=0,25>0,24$	**2p**
2.	$f(6-x)=(6-x)^2-6(6-x)+3=36-12x+x^2-36+6x+3=$	**3p**
	$=x^2-6x+3=f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x^2+4x-5=(x-1)^2\Rightarrow x^2+4x-5=x^2-2x+1$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 50 de elemente în mulțimea $\left\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N},\ n<50\right\}$, deci sunt 50 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 8 numere raționale în mulțimea $\left\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N},\ n<50\right\}$, deoarece sunt 8 numere naturale pătrate perfecte în mulțimea $\{0,1,2,\ldots,49\}$, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{8}{50}=\frac{4}{25}$	**2p**
5.	$m_{AB}=-1$	**2p**
	$m_{BC}=-1\Rightarrow m_{AB}=m_{BC}$, deci punctele A, B și C sunt coliniare	**3p**
6.	$m(\sphericalangle AOD)=90^\circ$, unde $\{O\}=AC\cap BD$ și $DO=3\Rightarrow AO=4$	**3p**
	$\sin(\sphericalangle ADB)=\frac{AO}{AD}=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$2*(-4)=2+(-4)+3=$	**3p**
	$=1$	**2p**
2.	$(x*y)*z=(x+y+3)*z=(x+y+3)+z+3=x+y+z+6$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+z+3)=x+(y+z+3)+3=x+y+z+6=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**3p**
3.	$x*(-3)=x+(-3)+3=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(-3)*x=(-3)+x+3=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
4.	$9^x+3^x-90=0\Leftrightarrow\left(3^x-9\right)\left(3^x+10\right)=0$	**3p**
	Deoarece $3^x>0$, soluția ecuației este $x=2$	**2p**
5.	$\left(2n^2-2n-1\right)*\left(2n^2-2n-1\right)=\left(2n^2-2n-1\right)+\left(2n^2-2n-1\right)+3=4n^2-4n+1=$	**3p**
	$=(2n-1)^2$, care este pătrat perfect pentru orice număr natural n	**2p**

6.	$a=(1*(-3))*(5*(-7))*(9*(-11))*(13*(-15))*(17*(-19))=1*1*1*1*1=5*5*1=13*1=$	**3p**
	$=17=\sqrt{289}\in\left(\sqrt{288},\sqrt{290}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$1=1+0\sqrt{5}$	**3p**
	Deoarece $0\in\mathbb{Z}$ și $1\in\mathbb{Z}$, obținem $1\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$	**2p**
2.	$x=a+b\sqrt{5}$, $y=c+d\sqrt{5}$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{5}$	**3p**
	Deoarece $a+c\in\mathbb{Z}$ și $b+d\in\mathbb{Z}$, obținem $x+y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$	**2p**
3.	$x=a+b\sqrt{5}$, $y=c+d\sqrt{5}$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{Z}\Rightarrow xy=(ac+5bd)+(ad+bc)\sqrt{5}$	**3p**
	Deoarece $ac+5bd\in\mathbb{Z}$ și $ad+bc\in\mathbb{Z}$, obținem $xy\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$	**2p**
4.	$\frac{1}{9+4\sqrt{5}}=\frac{9-4\sqrt{5}}{\left(9-4\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)}=$	**3p**
	$=\frac{9-4\sqrt{5}}{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=9-4\sqrt{5}$	**2p**
5.	$\frac{1}{9-4\sqrt{5}}=9+4\sqrt{5}$	**3p**
	Deoarece $9\in\mathbb{Z}$ și $4\in\mathbb{Z}$, obținem $\frac{1}{9-4\sqrt{5}}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$	**2p**
6.	De exemplu, pentru $x=9-4\sqrt{5}$, avem $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$ și $x=\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$	**3p**
	Deoarece $2<\sqrt{5}\Rightarrow 8<4\sqrt{5}\Rightarrow 17<9+4\sqrt{5}$, obținem $0<\frac{1}{9+4\sqrt{5}}<\frac{1}{17}$, adică $0<x<\frac{1}{17}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0{,}0625} = \frac{5}{4}$.

5p **2.** Determinați numărul real m, pentru care soluțiile ecuației $x^2 - (3m-4)x + m - 3 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 2^x + 4^x - 8^x = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $f(n) = 0$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(n) = n^3 + 3n - 4$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 6\sqrt{3}$ și $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Arătați că $\sin(a+b) = 1$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \neq b$ și $\sin a + \cos a = \sin b + \cos b$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x & 3 & y \\ x^2 & 2 & y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $\Delta(-1,0)$.

5p **b)** Demonstrați că $\Delta(x,y) = (x-y)(xy - 3x - 3y + 2)$, pentru orice numere reale x si y.

5p **c)** Determinați numerele întregi distincte x și y, știind că $\frac{1}{y-x}\Delta(x,y) = 8$.

2. Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Calculați $A(1) - A(0)$.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(1)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n) \cdot A(n) = A(p)$, atunci $n = 0$ și $p = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{2x+1}{x}$ și șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = f(n)$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

5p **c)** Demonstrați că $\ln 2 < x_n \leq \ln 3$, pentru orice număr natural n, $n \geq 1$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}, & x<1\\ \sqrt{x^2+4x-4}+a, & x\geq 1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care funcţia f este continuă în punctul $x=1$.

5p **c)** Pentru $a=2$, calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}} \dfrac{\ln\left(f(x)-2\right)}{x-1}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_{2016}63+\log_{2016}32+\sqrt{0{,}0625}=\log_{2016}2016+0{,}25=$	**3p**
	$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$	**2p**
2.	$x_1+x_2=3m-4$, $x_1x_2=m-3$	**2p**
	$3m-4=2m-6\Leftrightarrow m=-2$	**3p**
3.	$2^x\left(2+2^x-4^x\right)=0\Leftrightarrow 2^x\left(2-2^x\right)\left(1+2^x\right)=0$	**3p**
	Deoarece $2^x>0$, soluția ecuației este $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea $\{0,1,2,\dots,9\}$ are 10 elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 10	**1p**
	1 este singurul element al mulțimii $\{0,1,2,\dots,9\}$ care verifică relația $f(n)=0$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 1	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$	**2p**
	$BC=18$	**3p**
6.	$1+2\sin a\cos a=1+2\sin b\cos b\Rightarrow \sin 2a=\sin 2b$	**2p**
	Cum $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $a\neq b$, obținem $2a=\pi-2b$, adică $a+b=\frac{\pi}{2}$, deci $\sin(a+b)=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\Delta(-1,0)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2+0+0-0-3-0=$	**3p**
	$=-5$	**2p**
b)	$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}x-y & 3-y & y\\ x^2-y^2 & 2-y^2 & y^2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(x-y)\begin{vmatrix}1 & 3-y\\ x+y & 2-y^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(x-y)\left(2-y^2-3x+xy-3y+y^2\right)=(x-y)(xy-3x-3y+2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$xy-3x-3y+2=-8\Leftrightarrow(x-3)(y-3)=-1$	**3p**
	Cum x și y sunt numere întregi distincte, obținem $x=4,\ y=2$ sau $x=2,\ y=4$	**2p**

2.a)	$A(1)-A(0)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$	**2p**
	Inversa matricei $A(1)$ este matricea $\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}1&2^{n+1}&2\cdot 3^n+2^{2n}\\0&1&2^{n+1}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^p&3^p\\0&1&2^p\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$2^{n+1}=2^p \Leftrightarrow n+1=p$	**1p**
	$2\cdot 3^n+2^{2n}=3^{n+1}\Leftrightarrow 2^{2n}=3^n$, deci $n=0$ și $p=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln 2$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=\ln 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
b)	$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{2n+3}{n+1}-\ln\frac{2n+1}{n}=\ln\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}<\ln 1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**3p**
	$x_{n+1}-x_n<0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	**2p**
c)	$x_n\leq x_1=\ln 3$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**
	$x_n=\ln\frac{2n+1}{n}=\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)>\ln 2$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**3p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1$	**3p**
b)	f este continuă în $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=f(1)$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{x-7}{x-3}=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\left(\sqrt{x^2+4x-4}+a\right)=1+a$, $f(1)=1+a$	**3p**
	$3=1+a \Leftrightarrow a=2$	**1p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{\ln\sqrt{x^2+4x-4}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\ln\left(x^2+4x-4\right)^{\frac{1}{2(x-1)}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\ln\left(\left(1+x^2+4x-5\right)^{\frac{1}{x^2+4x-5}}\right)^{\frac{(x-1)(x+5)}{2(x-1)}}=$	**3p**
	$=\ln e^3=3$	**2p**