OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 2016
CLASA a XII-a

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ f_a \middle| f_a : R \to R,\ f_a(x) = \begin{cases} x(a-5) - 5a + 30, & x > 5 \\ 2 & x \le 5 \end{cases},\ a > 5 \right\}$

Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian, unde "$\circ$" reprezintă compunerea funcțiilor.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Presupunem că există $f : G \to G$ injectivă, astfel încât $x \cdot f\left(x^{2014} \cdot f(y)\right) = x^{2016} \cdot f(x \cdot y)$, oricare ar fi $x, y \in G$. Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

3. Să se calculeze integralele $I_1 = \int \sqrt{\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2n+1} + a}}\, dx$, x >0, a >0, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_2 = \int \frac{\sin x (\sin x + \cos x)}{e^{-2x} + \sin^2 x} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ cu proprietatea că funcția $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este primitivă a funcției f pentru care $g(1) = 0$, știind că $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + 1}$.

TIMP DE LUCRU : 2 ore

SUCCES!