Concurs Mate-Info UBB, 25-apr-2015
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Subiectul I (30 de puncte)

1. Se consideră ecuația $x^4-(2m-1)x^2+4m-5=0$, unde m este un parametru real.

a. pentru $m=\frac{1}{2}$ rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe;

b. determinați valorile lui m astfel încât ecuația să aibă toate rădăcinile reale.

2. Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice de numere reale. Să se demonstreze că dacă X nu este inversabilă, atunci $X^n=(a+d)^{n-1}X$ pentru orice număr natural $n\geq 2$.

Subiectul II (30 de puncte)

1. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A(2,3-m), B(m+2,-1)$ și $C(m,2-m)$, unde m este un parametru real.

a. demonstrați că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ punctele A,B,C nu sunt coliniare;

b. determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care aria triunghiului ABC este minimă.

2. Rezolvați inecuația $\sin^4 x+\cos^4 x\geq\frac{1}{2}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\operatorname{arctg}x$.

a. să se arate că funcția f este pară, iar derivata sa, f', este o funcție impară;

b. să se determine primitivele lui f și să se arate că una dintre ele este funcție impară.

2. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă având proprietatea că $\int_{-x}^{x} g(t)\,dt=0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că g este impară.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Concurs Mate-Info UBB, 29-mar-2014
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Subiectul I (30 de puncte)

1. **a.** fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Dacă $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$, arătați că $\alpha = \beta = \gamma$.

b. rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$. Determinați numerele reale a și b știind că f este divizibil cu $X - 2$, iar restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 11.

3. **a.** fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ mulțimea matricelor pătratice de ordin 2 cu elemente din $\mathbb{Z}_3$. Determinați numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

b. rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $(\hat{x})^3 = \hat{x}$.

Subiectul II (30 de puncte)

1. Se consideră punctele $O(0,0), A(3,4)$ și $B(x,y)$. Să se determine numerele reale x, y astfel încât triunghiul OAB să fie echilateral.

2. Fie OAB un triunghi echilateral, unde $O(0,0), A(m,n)$ și $B(x,y), m,n \in \mathbb{N}^*, x,y \in (0,+\infty)$. Demonstrați că B nu poate avea ambele coordonate numere naturale.

3. Rezolvați ecuația $\min\{\sin x, \cos x\} = \frac{\pi}{4}, x \in [0, 2\pi]$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Pentru fiecare triplet (a,b,c) de numere reale considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dacă } x < 0 \\ 2\sin x + \cos x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

a. determinați toate tripletele (a,b,c) pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$;

b. determinați toate tripletele (a,b,c) pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

c. arătați că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru un unic triplet (a,b,c) și, în acest caz, calculați $\int_{-1}^{\pi} f''(x)\,dx$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Concurs Mate-Info UBB, 13-apr-2013
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Subiectul I (30 de puncte)

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$. Discuție după $a \in \mathbb{R}$.

2. Determinați parametrul real a și rezolvați ecuația $x^3+3x^2-x-a=0$, știind că rădăcinile sale sunt în progresie aritmetică.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația $\sqrt[p]{x\sqrt[p]{x\sqrt[p]{\ldots}}}=2013$, unde $p \geq 2$ este un număr natural, iar numărul radicalilor în ecuație este infinit.

Subiectul II (30 de puncte)

1. În planul xOy se dau punctele $A(-1,0)$ și $B(1,0)$.

a. să se scrie ecuația dreptei (d) paralelă cu axa Ox, aflată la o distanță de 3 unități deasupra axei;

b. să se calculeze aria triunghiului PAB, unde P este un punct arbitrar pe dreapta (d) definită mai sus;

c. să se determine punctul $M \in (d)$ pentru care $m(MAB)=\frac{\pi}{6}$;

d. să se determine punctul $Q \in (d)$ pentru care suma distanțelor $QA+QB$ este minimă.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x)=|x-1|\sqrt{x}$.

a. să se determine domeniul maxim de definiție D, precum și mulțimile D_c și D_d a punctelor în care funcția f este continuă, respectiv derivabilă;

b. să se determine intervalele de monotonie și intervalele de concavitate/convexitate pentru f, cu precizarea punctelor de extrem local, a punctelor de inflexiune și a punctelor unghiulare ale graficului lui f;

c. să se afle aria suprafeței plane delimitate de axa Ox, graficul funcției și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.