BAREM DE CORECTARE

ETAPA LOCALĂ - 21.02.2016

CLASA A IX-A

<u>Subiectul I (7p)</u>

Fie n un număr natural compus și $1 = d_1 < d_2 < \dots\dots\dots < d_k = n$ divizorii săi naturali , $k \geq 3$. Să se arate că $d_1, d_2, \dots , d_k$ nu sunt în progresie aritmetică.

Gazeta Matematică

Presupunem că $d_1, d_2, \dots , d_k$ sunt în progresie aritmetică. Pentru $k \geq 4$ avem $d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1} = 1 + n$, deci $d_{k-1} = n - (d_2 - 1)$ 2p

Cum d_{k-1}/n , rezultă că $d_{k-1}/(d_2 - 1)$, fals, deoarece $0 < d_2 - 1 < d_{k-1}$ 2p

Pentru $k = 3$, rezultă că $n = p^2$, unde p este număr prim..1p

Cum $d_2 = p$ și $d_3 = p^2$, atunci $p^2 + 1 = 2p$, deci $p = 1$, fals..2p

<u>Subiectul II (7p)</u>

(2p) a) Determinați $\left[\sqrt{4n^2 - 2n}\,\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) b) Arătați că $\left[\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}}\right] = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x).

a) Avem $4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 2n < 4n^2$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $(2n - 1) < \sqrt{4n^2 - 2n} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 2n}\right] = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p

b) Trebuie demonstrat că $2 \leq \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}} < 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este echivalent cu

$\frac{n}{3} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{4k^2 - 2k} - (2k - 1)\right) \leq \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$...2p

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + 2k - 1\right) < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k^2 - 2k} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + 2k - 1\right)$..1p

Este suficient să arătăm că $\frac{6k-2}{3} < \sqrt{4k^2 - 2k} \leq \frac{4k-1}{2}, \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{36k^2-24k+4}{9} < 4k^2 - 2k \leq \frac{16k^2-8k+1}{4}$,$\forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow -24k + 16 < 0 \leq 9,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, adevărat......................................2p

Subiectul III (7p)

Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, demonstrați că:

$$\frac{xy}{xy+x+y}+\frac{yz}{yz+y+z}+\frac{zx}{zx+z+x}\leq\frac{6+x^2+y^2+z^2}{9}.$$

$\frac{xy}{xy+x+y}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\frac{1+x+y}{9},\ x,y\ \in(0,\infty)$ 3p

$\sum\frac{xy}{xy+x+y}\leq\frac{3+2(x+y+z)}{9}, x,y,z\in(0,\infty)$ 1p

Cum $2x\leq x^2+1,\ 2y\leq y^2+1,\ 2z\leq z^2+1$

Avem $\sum\frac{xy}{xy+x+y}\leq\frac{6+x^2+y^2+z^2}{9}$ 3p

Subiectul IV (7p)

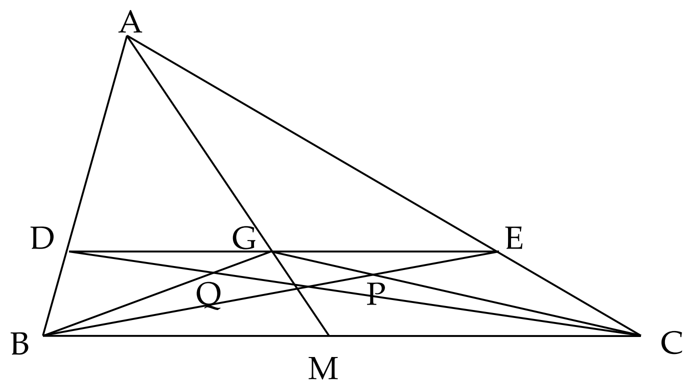
În triunghiul *ABC* se consideră *M* mijlocul lui $[BC]$ și $G\in(AM)$ astfel încât $\frac{AG}{AM}=k$.
Paralela prin *G* la *BC* intersectează *AB* în *D* și *AC* în *E*. Fie $BG\cap CD=\{Q\}$ și $CG\cap BE=\{P\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{GQ}{QB}=\frac{k}{2}$;

(3p) b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și scalarul *k* ;

(2p) c) Demonstrați că, dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC* , atunci

$\Delta MPQ \sim \Delta ABC$.



a) $DG \parallel BC \Rightarrow \Delta DQG \sim \Delta CQB \Rightarrow \frac{GQ}{QB} = \frac{DG}{BC} \Rightarrow \frac{GQ}{QB} = \frac{DG}{2BM}$

Cum $\Delta ADG \sim \Delta ABM$, avem $\frac{DG}{BM} = \frac{AG}{AM} = k$

Deci $\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2}$ 2p

b) $\frac{AG}{AM} = k \neq 1 \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{k}{1-k}$

$$\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{BQ}{BG} = \frac{2}{k+2} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{k+2}\overrightarrow{BG} = \frac{2}{k+2}\left(\frac{\overrightarrow{BA} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BM}}{1 + \frac{k}{1-k}}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{k+2}\left((k-2)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right)$ 2p

Dar $\overrightarrow{GQ} = -\frac{k}{2}\overrightarrow{BQ}$, deci $\overrightarrow{GQ} = -\frac{k}{2(k+2)}\left((k-2)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right)$...1p

c) G centrul de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow MQ \parallel AC(1)$$

Analog $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow MP \parallel AB(2)$ 1p

Se arată că $\frac{GP}{PC} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{GP}{PC} = \frac{GQ}{QB} \Rightarrow PQ \parallel BC(3)$

Din (1) , (2) , (3) $\Rightarrow \Delta MPQ \sim \Delta ABC$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, februarie 2016
Clasa a X-a
Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL I (7p)

a) Demonstrați că:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}, \forall k,n \in \mathbb{N}^*, k \le n.$$

b) Ordonați crescător numerele:

$$1+\frac{1}{n}, \log_n(n+1), \log_{n+1}(n+2) \text{, pentru } n \ge 3.$$

a) Demonstratia prin inductie a inegalitatii...2p

b) $l\log_n(n+1) < 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$,adevărată pt $n \ge 3$ (se obtine din punctul a) ..**2p**

c) $\log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1) \Leftrightarrow (\log_{n+1} n)\log_{n+1}(n+2) < 1$...1p

Aplicarea inegalitatii mediilor 1p

Finalizare: $\log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1) < 1+\frac{1}{n}$ 1p

SUBIECTUL II (7p)

Fie mulțimea $A=\left\{a+b\sqrt{3} \,/\, a,b \in Z, a^2-3b^2=1\right\}$. **Demonstrați că:**

a) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$;

b) $x \in A \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} \in Z, \forall n \in N$;

c) **există numere din *A* care au primele 100 de zecimale egale cu 9.**

a) $\frac{1}{a+b\sqrt{3}} = a-b\sqrt{3}$ **1p**

b) Se demonstreaza prin inductie.. **2p**

c) Fie $x = 2+\sqrt{3} \in A$. Evident $x>1$ si $x^n \notin \square$. Exista $n \in N$, de exemplu, $n = \left[\frac{100}{\lg x}\right]+1$ astfel ca

$\frac{1}{x^n} < \frac{1}{10^{100}}$ **2p**

Cum ,din b), $x^n+\frac{1}{x^n} = p \in N \Rightarrow \left[x^n\right] = p-1 si \left\{x^n\right\} = 1-\frac{1}{x^n} > \frac{10^{100}-1}{10^{100}} = 0,\underbrace{99...9}_{100}$ ……**2p**

Str. N. Iorga Nr. 28, 710213, Botoşani
Tel: +40 231 584050/ fax: +40 231 584052
email: office.isjbt@gmail.com
www.isj2.botosani.ro

Str. General Berthelot Nr. 28-30
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05, www.edu.ro

SUBIECTUL III (7p)

Fie $z \in \mathbb{C}$ care satisface ecuația $(z+i)^{10} + i(z-i)^{10} = 0$. Să se arate că:

a) $|z+i| = |z-i|$;

b) $z \in \mathbb{R}$

c) Să se rezolve ecuația.

a) Se separa termenii si se trece la module..1p

b) Se foloseste a) sau ca, imaginea lui z este egal departata de imaginea lui i si (–i).........2p

c) Ecuatia este echivalenta cu $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = -i$ 1p

Forma trigonometrica a lui i 1p

Multimea solutiilor este $\left\{ ctg\dfrac{4k\pi + 3\pi}{40} \,/\, k \in \{0,1,2,...,9\} \right\}$..3p

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $z, z' \in \mathbb{C}$ cu $|z| = |z'| = 1$. Să se arate că:

$$\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)^{2n} + \left(\frac{z-z'}{1-zz'}\right)^{2n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, zz' \neq \pm 1.$$

$z = \cos a + i \sin a, z' = \cos b + i \sin b$.........$1p$

$A = \dfrac{z+z'}{1+zz'} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}, B = \dfrac{z-z'}{1-zz'} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, unde $\alpha = \dfrac{a-b}{2}, \beta = \dfrac{a+b}{2}$...................**2p**

$A^{2n} + B^{2n} \geq 2\left(\dfrac{A^2+B^2}{2}\right)^n \geq \dfrac{2}{2^n}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\beta\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ **4p**

Orice alta solutie se ia in considerare.

Str. N. Iorga Nr. 28, 710213, Botoșani
Tel: +40 231 584050/ fax: +40 231 584052
email: office.isjbt@gmail.com
www.isj2.botosani.ro

Str. General Berthelot Nr. 28-30
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05, www.edu.ro

BAREM DE CORECTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a XI - a

<u>SUBIECTUL I</u> (7p)

Fie șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ **definit prin** $a_1>0$ **și** $a_{n+1}=a_n\sqrt{\dfrac{n}{n+a_n^4}}$ **,** $n\geq 1$**. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.**

Florin Rotaru, Focșani - GM. 11/2015.

Prin inducție se obține $a_n>0$, $(\forall)n\geq 1$ deci șirul este mărginit inferior .... $(1p)$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\dfrac{n}{n+a_n^4}}<1$, $(\forall)n\geq 1$ deci șirul este strict descrescător .... $(1p)$

Din teorema lui Weierstrass se obține convergența șirului cu limita $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l\geq 0$ .... $(1p)$

Relația de recurență devine $a_{n+1}^2=\dfrac{na_n^2}{n+a_n^4}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{n+a_n^4}{na_n^2}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{1}{a_n^2}+\dfrac{a_n^2}{n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{a_n^2}{n}$ .... $(1p)$

Sumând relațiile anterioare $\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2}{k}$ și cum $a_k^2>l^2\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}>\dfrac{1}{a_1^2}+l^2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ .... $(1p)$

Dacă prin absurd $l>0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\infty$, trecând la limită în inegalitatea anterioară deducem că

$\dfrac{1}{l^2}\geq\dfrac{1}{a_1^2}+l^2\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{1}{l^2}\geq\infty$ ceea ce este absurd .... $(1p)$

În concluzie, rămâne $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l=0$ .... $(1p)$

<u>SUBIECTUL II</u> (7p)

$(2p)$ **a) Să se arate că dacă funcția** $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ **este periodică și există** $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=l$**, atunci** $l\in\boldsymbol{R}$ **și** F **este constantă.**

$(5p)$ **b) Determinați funcțiile** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ **care verifică condițiile:**

i) există $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=a\in\boldsymbol{R}$ **;**

ii) $f(x+2)+f(x)=2f(x+1)$**,** $(\forall)x\in\boldsymbol{R}$ **.**

a) Fie T o perioadă $(T>0)$ a funcției și presupunem prin absurd că $(\exists)x_1\neq x_2$ cu $F(x_1)\neq F(x_2)$.

Dacă $x_n{}'=x_1+nT\to\infty$, $F\left(x_n{}'\right)=F(x_1+nT)=F(x_1)\to F(x_1)$ iar dacă

$x_n{}''=x_2+nT\to\infty$, $F\left(x_n{}''\right)=F(x_2+nT)=F(x_2)\to F(x_2)$ deci F nu are limită la ∞ , contradicție ..... $(1p)$

Așadar funcția este constantă $\left(F(x)=c\right)$ iar $l=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=c\in\boldsymbol{R}$ .... $(1p)$

b) Notăm $g(x)=f(x)-x$ și condiția ii) se scrie $g(x+2)+g(x)=2g(x+1)\Leftrightarrow$

$g(x+2)-g(x+1)=g(x+1)-g(x)\Leftrightarrow h(x+1)=h(x)$, $(\forall)x\in\boldsymbol{R}$ unde $h(x)=g(x+1)-g(x)$ ...... $(1p)$

$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-(x+1)-\left(f(x)-x\right)\right]=a-a=0$ .... $(1p)$

$h(x+1)=h(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow h$ este periodică .... $(1p)$

Ultimele două observații, utilizând a) $\Rightarrow h$ este funcție constantă și $h(x)=0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ .... $(1p)$

$\Rightarrow g(x+1)=g(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow g$ este periodică și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a \Rightarrow g$ este constantă

$g(x)=a \Rightarrow f(x)=x+a$ (care verifică ipotezele) .... $(1p)$

<u>SUBIECTUL III</u> (7p)

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

$(1p)$ a) Determinați toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ pentru care $AB=BA$;

$(3p)$ b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^2=A$;

$(1p)$ c) Arătați că $A^2=2\cdot 3\cdot A-3^2\cdot I_2$ și $A^3=3\cdot 3^2\cdot A-2\cdot 3^3\cdot I_2$;

$(2p)$ d) Calculați A^{2016}.

a) Se caută $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și se obține $B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix}$ cu $a,b\in\mathbf{R}$ .... $(1p)$

b) $X^3=X^2\cdot X=X\cdot X^2 \Rightarrow X^2\cdot A=A\cdot X^2$, așadar X^2 comută cu A și (pct. a)) căutând matricea X de forma $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix}$ se obține sistemul $\begin{cases} a^2-b^2=2 \\ 2b^2-2ab=1 \\ a^2-4ab+3b^2=4 \end{cases}$ .... $(1p)$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=2 \\ -4b^2+4ab=-2 \end{cases} \Rightarrow a^2+4ab-5b^2=0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+4\cdot\frac{a}{b}-5=0$, etc. Se obțin soluțiile $a=\pm\frac{5}{2\sqrt{3}}$ și

$b=\mp\frac{1}{2\sqrt{3}}$ care verifică și ultima ecuație a sistemului $\Rightarrow X\in\left\{\begin{pmatrix} \frac{5}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{7}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\frac{5}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{7}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right\}$ ...... $(2p)$

c) verificare directă .... $(1p)$

d) se arată prin inducție că $A^n=n\cdot 3^{n-1}\cdot A-(n-1)\cdot 3^n\cdot I_2 \Rightarrow A^{2016}=2016\cdot 3^{2015}A-2015\cdot 3^{2016}I_2$ .... $(2p)$

<u>SUBIECTUL IV</u> (7p)

$(2p)$ a) Să se demonstreze că $(\forall)A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu $AB=BA$, avem $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

$(5p)$ b) Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A+{}^tA=O_n$. Să se arate că $(\forall)\lambda\in\mathbf{R}$, avem $\det\left(I_n+\lambda A^2\right)\geq 0$.

a) $\det\left(A^2+B^2\right)=\det\left((A+iB)(A-iB)\right)=\det(A+iB)\det(A-iB)=\det(A+iB)\det\left(\overline{A+iB}\right)=$

$=\det(A+iB)\overline{\det(A+iB)}=\left|\det(A+iB)\right|^2\geq 0$ .... $(2p)$

b) Dacă $\lambda>0$ se utilizează a): $\det\left(I_n+\lambda A^2\right)=\det\left(I_n^2+\left(\sqrt{\lambda}A\right)^2\right)\geq 0$ (I_n și $\sqrt{\lambda}A$ comută) .... $(1p)$

Dacă $\lambda=0$ inegalitatea este evidentă .... $(1p)$

Dacă $\lambda<0$, fie $\lambda=-\alpha$, $\alpha>0$ și $\det\left(I_n+\lambda A^2\right)=\det\left(I_n-\alpha A^2\right)=\det\left(I_n-\sqrt{\alpha}A\right)\cdot\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)$..... $(1p)$

$=\det\left({}^tI_n+\sqrt{\alpha}\left({}^tA\right)\right)\cdot\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)=\det{}^t\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)\cdot\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)=\left(\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)\right)^2\geq 0$ .... $(2p)$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, Botoșani, 21.02.2016

Clasa aXII-a

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL I (7 p)

Fie $a \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție "$\circ$" definită pe $\mathbb{R}$ astfel: $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $(\mathbb{R}, \circ)$ este monoid comutativ;

b) Determinați numerele reale x cu proprietatea că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2016 dex} = x$.

Solutie

a) Se verifică axiomele monoidului. ………………………………………………. 3p

b) Avem $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2016 dex} = (x-a)^{2016} + a$ ……………………………………………. 2p

Ecuația devine $(x-a)^{2016} = x - a$ ……………………………………………… 1p

Se obține $x \in \{a, a+1\}$ ……………………………………………………………… 1p

SUBIECTUL II (7 p)

a) Calculați $\int \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} dx$, pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x} dx$.

Soluție:

a) $\int \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} dx = \frac{4}{5} \int \frac{2\sin x + \cos x}{2\sin x + \cos x} dx + \frac{3}{5} \int \frac{2\cos x - \sin x}{2\sin x + \cos x} dx = \frac{4}{5} x + \frac{3}{5} \ln|2\sin x + \cos x| + C$ … 3p

b) Se folosește schimbarea de variabilă $y = -x$ ……………………………………………….... 4p

SUBIECTUL III (7 p)

Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(a_n)_{n\ge 1}$ șirul definit prin $a_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = f(0)$.

b) Dacă f este derivabilă în $x = 0$ să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - f(0)\right)$.

Soluție:

a) Schimbarea de variabilă $t = \frac{x}{n}$ și se obține $a_n = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt = \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt}{\frac{1}{n}}$ **1p**

Se aplică regula lui l'Hospital și se obține $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = f(0)$.................................. **1p**

$\lim_{n\to 0}\frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt}{\frac{1}{n}} = f(0)$ și atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = f(0)$.. **1p**

b) $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - f(0)\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt - f(0)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f(0)}{\frac{1}{n^2}}$ **2p**

Se aplică regula lui l'Hospital și se obține $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - xf(0)}{x^2} = \frac{1}{2}f'(0)$

și se deduce că $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - f(0)\right) = \frac{1}{2}f'(0)$.. **2p**

SUBIECTUL IV (7 p)

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente și o funcție $f : G \to G$ cu proprietatea :

$$f\left(xf(xy)\right) = yf\left(x^2\right), \forall x, y \in G.$$

Să se demonstreze că G este grup comutativ.

Solutie: **Gazeta Matematică**

Pentru x=e în relația dată obținem $f\left(f(y)\right) = yf(e)$, pentru orice $y \in G$, de unde rezultă că f este injectivă **2p**

Pentru $y = e$ în relația dată, obținem $f\left(xf(x)\right) = f\left(x^2\right)$, pentru orice $x \in G$ și folosind faptul că f este injectivă avem: $xf(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = x$ pentru orice $x \in G$....................................... **2p**

Relația din enunț devine $x^2y = yx^2$, G are $2n+1$ elemente, deci $x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$ **1p**

Avem $xy = x^{2n+2}y = \left(x^{n+1}\right)^2 y = y\left(x^{n+1}\right)^2 = yx^{2n+2} = yx$ **2p**