Barem de notare si corectare
Clasa a V a

Subiectul I.

a) Determinaţi dacă numărul de mai jos este pătrat perfect.

$[(2^7)^2 \cdot (2^2)^8 + 5^{50}: 5^5 - (7^{16})^2]: [(8^5)^2 + (5^3)^{15} - (7^{4^2})^2]$.

b) Arătaţi că diferenţa dintre jumătatea lui 8^{48}şi sfertul lui 4^{71}este divizibilă cu 14.

Soluţie

a) $n = (2^{14} \cdot 2^{16} + 5^{45} - 7^{32}): (8^{10} + 5^{45} - (7^{16})^2) = (2^{30} + 5^{45} - 7^{32}): (2^{30} + 5^{45} - 7^{32}) = 1$……………………………………………………………………………………….................**2p**

iar 1 este patrat perfect deorece $1 = 1^2$ …...**1p**

b)$8^{48}: 2 - 4^{71}: 4 = (2^3)^{48}: 2 - 4^{70} = 2^{144}: 2 - (2^2)^{70} = 2^{143} - 2^{140} = 2^{140}(2^3 - 1)$……......**2p**

Dar $2^{140}(2^3 - 1) = 2^{139} \cdot 2 \cdot 7 = 2^{139} \cdot 14$, deci divizibil cu 14...**2p**

Subiectul II

Aflaţi patru numere naturale, ştiind că suma lor este 55, primul număr este jumătate din cel de-al doilea, al treilea număr este media aritmetică a primelor două, iar al patrulea număr este dublul diferenţei dintre al doilea şi al treilea.

Gazeta Matematica

Solutie

Notăm numerele cu a, b, c, d. Avem urmatoarele relaţii

a+b+c+d=55, a=b:2, c=(a+b):2 si d=2 (b-c)..**1p**

Înlocuim pe b=2a in relaţia a treia şi obţinem c=3a:2, pe care de asemenea le substituim în ultima relaţie...**2p**

d=2(b-c)= 2(2a-3a:2)=4a-3a=a **…..1p**

Avem toate necunoscutele exprimate în funcţie de *a* şi le înlocuim în suma lor

a+2a+3a:2+a=55. Înmulţind cu 2, obţinem 11*a*=110, de unde *a*=10....................................**2p**

Celelalte numere sunt b=20, c=15 şi d=10...**1p**

Subiectul III

Fie mulţimea $A = \{\overline{abcd}, \overline{ab} = \overline{cd} + 4\}$

a). Determinaţi dacă 2016 si respectiv 2024 aparţin mulţimii A.

b). Aflaţi restul împărţirii unui număr oarecare din A la 101.

c). Daca S este suma tuturor numerelor din A, arătaţi că S nu este pătrat perfect.

Soluţie

a). 2016 are 20 =16 + 4, iar 2024 nu verifica 20=24+4. Deci 2016 aparţine mulţimii, iar 2024 nu aparţine...**1p**

b). $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = (\overline{cd} + 4) \cdot 100 + \overline{cd} = \overline{cd} \cdot 101 + 400$.…..................................**2p**

Cum primul termen este divizibil cu 101, atunci restul împărţirii acestui numar la 101 este restul impărţirii lui 400 la 101, adica 97...**1p**

Este mai usor să scriem $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} - 4 = \overline{ab} \cdot 101 - 4$. Deoarece a nu poate fi 0 avem în total 90 de numere, şi asfel suma este:
$S = 10 \cdot 101 - 4 + 11 \cdot 101 - 4 + \ldots + 99 \cdot 101 - 4 = 101 \cdot (10 + 11 + \ldots + 99) - 4 \cdot 90 = 101 \cdot (99 \cdot 100 : 2 - 9 \cdot 10 : 2) - 360 = 101 \cdot (45 \cdot 110 - 45) - 360 = 45 \cdot (101 \cdot 110 - 101 - 8)$……………………………………………………………………………………………...........**2p**
Observăm că numărul din ultima paranteză are ultima cifră 1 , deci nu este divizibil cu 5. Cum S este divizibil cu 5, dar nu este divizibil cu 25, concluzionăm că S nu este pătrat perfect...**1p**

Subiectul IV

Se consideră mulţimea numerelor formate numai din cifrele 1 şi 2, cu cel mult 2016 cifre.
a). Să se calculeze câte numere sunt cu 5 cifre.
b). Să se calculeze câte numere sunt în mulţime.
c). Să se arate că există în mulţime un numar divizibil cu 3^6.

Soluţie

a) Un numar de 5 cifre de forma are pentru fiecare cifra 2 posibilităţi, 1 şi 2, deci ele sunt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ numere...**2p**

b) Pentru fiecare numar $1 \leq k \leq 2016$, avem că în mulţime sunt 2^knumere cu k cifre.
Deci numărul de elemente din mulţime este
$N = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016}$…...**1p**
Adunăm 2 şi obţinem
$N + 2 = (2 + 2) + 2^2 + \ldots + 2^{2016} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^{2016} = (2^3 + 2^3) + \ldots + 2^{2016} = \ldots$
$= 2^{2016} + 2^{2016} = 2^{2017}$
Deci N=$2^{2017} - 2$…..**2p**

c).Considerăm cele 2016 numere formate numai cu cifra 1. Deoarece $2016 = 2^5 \cdot 9 \cdot 7 > 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^6$, cel puţin două dintre numere dau acelaşi rest la împărţirea cu 3^6..**1p**

Diferenţa acestor numere este de forma 111...11000...0=$11\ldots1 \cdot 10^t$ şi este divizibilă cu 3^6. Cum 3 si 10 nu au divizor comuni, 3^6divide numărul format numai din cifre de 1, care apaţine lui A..**1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală- 21.02.2016
Clasa a VI- a
Barem de evaluare și notare

Subiectul I

Se consideră numerele naturale a=3n+2, b=2n+1 și c=n+1, n$\in \mathbb{N}$.

a) Demonstraţi că a și b sunt prime între ele.

b) Arătaţi că numărul $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$ este pătrat perfect , pentru orice număr natural n (s-a notat cu $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y).

Soluție:

a) Fie d$\in\mathbb{N}$, d/a și $d/b \Longrightarrow d/2a$ și $d/3b$ ……………………………………………………1p
d/2a- 3b, 2a-3b=1 ⟹d/1⟹ d=1⟹ (a,b)=1 …………………………………… 2p

b) Din a) avem (a,b)=1 ⟹ $[a,b]$=ab ……………………………………………………1p
(a,c)=1 ⟹ $[a,c]$=ac ……………………………………………………………………… 1p
$[a,b]+[a,c]$=ab +ac=a(b+c)=$(3n+2)^2$ ………………………………………… 2p

Subiectul II

Arătați că :

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2016}<\frac{2016}{2017}.$$

Soluție:

1+2+3+….+2016=$\frac{2016\cdot2017}{2}$ ………………………………………………………………………1p

1+2=$\frac{2\cdot3}{2}$, 1+2+3=$\frac{3\cdot4}{2}$, 1+2+3+4=$\frac{4\cdot5}{2}$,…………………………………………………………………1p

$S=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2016}=\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\frac{2}{4\cdot5}+\cdots+\frac{2}{2016\cdot2017}$ ……2p

$S=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017})=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2017})=\frac{2015}{2017}<\frac{2016}{2017}$ …… ……… 3p

Subiectul III

Fie A=$\{(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\mathbf{10}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\ \vdots\ \mathbf{19}\}$ și B=$\{(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\mathbf{2015}\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\boldsymbol{b}\ \vdots\ \mathbf{19}\}$.

Arătați că A⊃B.

Soluție:

Arătăm că daca (a;b)∈ B atunci (a;b)∈ A **1p**

- Fie (a;b)∈ B $\Longrightarrow 19/2015a+2b$,cum $19/1995a$ $\Longrightarrow$ 19/20a+2b

20a+2b=2(10a+b) și (19,2)=1, rezultă că 19/10a+b, deci (a;b)∈ A **6p**

Subiectul IV

Fie punctele coliniare A,O și B, cu O∈ $(\boldsymbol{AB})$. De aceeași parte a dreptei AB se consideră punctele C și D astfel încât unghiurile ∡AOC și ∡COD să fie adiacente. Fie $[\boldsymbol{OM}$ bisectoarea unghiului ∡AOC și $[\boldsymbol{ON}$ bisectoarea unghiului ∡$\boldsymbol{B}$OD. Se știe că m(∡MOD)=115° și m(∡NOC)=110°

a) Arătați că unghiul ∡COD este drept.

b) Aflați m(∡AOC) și m(∡$\boldsymbol{D}$OB).

c) În interiorul unghiului ∡COD se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea în O, astfel încât cele 13 unghiuri formate, cu interioarele disjuncte două câte două, au măsurile exprimate prin numere naturale nenule. Demonstrați că cel puțin două dintre aceste unghiuri sunt congruente.

Soluție:

a) Pentru figură corectă **1p**

Notăm x=m(∡AOM)=m(∡ MOC) și cu y=m(∡ BON)=m(∡ NOD).

Din relațiile 2x+2y+m(∡ COD)=180°, x+$m(∡COD)=115°$ și y+$m(∡\ COD)$=110°, se obține că m(∡ COD)=90° **2p**

b) m (∡ MOC)= $115°-90°=25°$.

m(∡ AOC)=2m(∡ MOC)=2·25°=50° **1p**

m(∡ DOB)= 40° **1p**

c) Suma măsurilor celor 13 unghiuri este 90° .

1+2+3+........+13=91 > 90, de unde concluzia cerută. **2p**

Bareme de corectare –cl.a VII-a
Etapa locală, Botoşani, 21 februarie 2016

Subiectul I (7 puncte)

a) Arătaţi că, dacă numerele raţionale a şi b îndeplinesc simultan condiţiile: a + b < 4 şi ab – 2a – 2b + 4 > 0, atunci a < 2 şi b < 2.

Soluţie:

$ab - 2a - 2b + 4 > 0 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) > 0$ **(1p)**

Rezultă cazurile:

i) $a - 2 > 0$ şi $b - 2 > 0 \Rightarrow a + b > 4$ (fals) **(1p)**

ii) $a - 2 < 0$ şi $b - 2 < 0 \Rightarrow a + b < 4$ **(1p)**

Din $a - 2 < 0$ şi $b - 2 < 0$, rezultă $a < 2$ şi $b < 2$ **(1p)**

b) Să se arate că $x = \frac{5k-3}{4}$ şi $y = \frac{7k-2}{6}$ nu pot fi ambele numere întregi, oricare ar fi k număr întreg.

Soluție:

Dacă $x \in Z \Longrightarrow 4 \mid 5k - 3 \Longrightarrow 4 \mid 4k + k - 3 \Longrightarrow 4 \mid k - 3 \Longrightarrow 2 \mid k - 3$ **(1p)**

Dacă $y \in Z \Longrightarrow 6 \mid 7k - 2 \Longrightarrow 6 \mid 6k + k - 2 \Longrightarrow 6 \mid k - 2 \Longrightarrow 2 \mid k - 2$ **(1p)**

$2 \mid k - 3$ și $2 \mid k - 2$ (contradicție), de unde rezultă concluzia. **(1p)**

Subiectul II (7 puncte)

Să se determine cifrele a şi b (din baza 10) ştiind că numărul raţional $r = \overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)}$ se poate scrie sub formă de fracţie zecimală finită.

Soluție:

Avem r=

$$\overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)} = \frac{\overline{a2b} - \overline{a2}}{90} + \frac{\overline{b3a} - \overline{b3}}{90} = \frac{90 \cdot a + b + 18}{90} + \frac{a + 90 \cdot b + 27}{90} = \frac{91 \cdot a + 91 \cdot b + 45}{90}$$

(2p) **(1p)**

Dar r este fracţie zecimală finită numai dacă 9 divide $91 \cdot a + 91 \cdot b + 45$ **(1p)**

$9/(91(a+b) + 45) \Longrightarrow 9/(91(a+b)) \Longrightarrow 9/(a+b)$ **(1p)**

Dar a, b $\in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \Longrightarrow 0 \le a+b \le 16 \Longrightarrow a+b=0$ sau $a+b=9$ **(1p)**

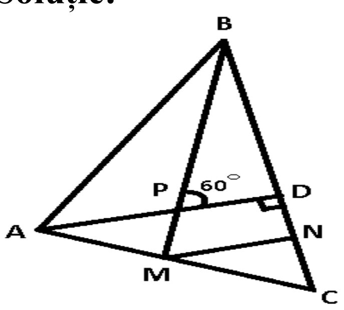
$\Rightarrow$ (a;b) $\in$ {(0;0) ; (1;8) ; (2;7) ; (3;6) ; (4;5) ; (5;4) ; (6;3) ; (7;2) ; (8;1)} **(1p)**

Subiectul III (7 puncte)

Într-un triunghi ascuțitunghic, o înălțime și o mediană construite din vârfuri diferite formează un unghi cu masura de 60º. Arătați că înălțimea și mediana au aceeași lungime.

(**Gazeta Matematică nr.9/2015)**

Soluție:



Δ ABC ascuțitunghic: construim înălțimea [AD] și mediana [BM].

$AD \cap BM = \{\mathbf{P}\}; m(\ \sphericalangle(AD, BM)) = m(\sphericalangle BPD) = 60^\circ$

Construim $MN \perp BC$, $N \in (BC) \Rightarrow MN \parallel AD$ **(2p)**

ΔBDP : $m(\sphericalangle D) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle P) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle PBD) = 30^\circ$ **(1p)**

ΔBNM: $m(\sphericalangle N) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle MBN) = 30^\circ \Rightarrow MN = \frac{BM}{2}$ (i) **(1p)**

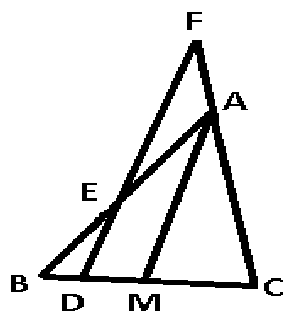
ΔADC: Dacă M este mijlocul lui [AC] și $MN \parallel AD \Rightarrow$[MN] este linie mijlocie

$\Rightarrow MN = \frac{AD}{2}$ (ii) **(2p)**

Din (i) și (ii) $\Rightarrow$ AD = BM **(1p)**

Subiectul IV (7 puncte)

Printr-un punct oarecare D situat pe latura (BC) a triunghiului ABC diferit de mijlocul laturii, se duce paralela la mediana [AM], M $\in$ (BC), care intersectează dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F.



Demonstrați că:

a) AB·AF=AC·AE **(3p)**

b) DE+DF=constant **(4p)**

Soluție: Aplicăm Teorema lui Thales în triunghiurile:

Δ CFD:AM $\parallel$ FD $\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC}$ (1) **(1p)**

Δ BAM:ED $\parallel$ AM $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{BM}$ (2) **(1p)**

Deoarece BM =MC, din (1) și (2) $\Longrightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ $\Longrightarrow$AB · AF = AC · AE **(1p)**

a) Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în aceleași triunghiuri și obținem:

Δ MAC ~ Δ DFC $\Longrightarrow \frac{MA}{DF} = \frac{MC}{DC}$ $\Longrightarrow$DF = $\frac{MA \cdot DC}{MC}$ **(1p)**

Δ DBE ~ Δ MBA $\Longrightarrow \frac{DE}{MA} = \frac{BD}{BM}$ $\Longrightarrow$DE = $\frac{MA \cdot BD}{BM}$ **(1p)**

Deoarece BM = MC, avem: DE + DF = $\frac{MA \cdot BD}{BM} + \frac{MA \cdot DC}{MC}$ **(1p)**

DE + DF = $\frac{MA \cdot (BD+DC)}{BM} = \frac{MA \cdot BC}{BM} = \frac{MA \cdot 2BM}{BM}$ = 2AM = constant **(1p)**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ- **CLASA VIII**

21 februarie 2016

BAREM DE NOTARE SI CORECTARE

SUBIECTUL I (7p=3p+4p))

a) Să se arate că $\frac{\boldsymbol{n^2-1}}{\boldsymbol{(n+1)^2}} < \frac{\boldsymbol{n^2}}{\boldsymbol{(n+1)^2}} < \frac{\boldsymbol{n^2}}{\boldsymbol{(n+1)^2-1}}, (\forall)\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că numărul $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot2015}}{\boldsymbol{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot\ldots\cdot2016}} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{45}; \frac{\sqrt{3}}{44}\right)$.

Soluție:

a) Cum $(n+1)^2 > 0$, din $n^2-1 < n^2 \Rightarrow \frac{n^2-1}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{(n+1)^2}$.. (1p)

iar din $(n+1)^2 > (n+1)^2-1 \Rightarrow \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{(n+1)^2-1}$..(1p)

finalizare .... (1p)

b) $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{45}; \frac{\sqrt{3}}{44}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{45} < a < \frac{\sqrt{3}}{44} \Rightarrow \frac{2}{2025} < a^2 < \frac{3}{1936}$ .... (1p)

$$a^2 = \frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2015^2}{2016^2} > \frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\ldots\frac{2015^2-1}{2016^2}\frac{2\cdot4}{4^2}\cdot\frac{4\cdot6}{6^2}\cdot\frac{6\cdot8}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2014\cdot2016}{2016^2}$$

$= \frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{8}\cdot\ldots\frac{2014}{2016} = \frac{2}{2016} > \frac{2}{2025}$ .... (1p)

$$a^2 = \frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2015^2}{2016^2} < \frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\frac{7^2}{8^2-1}\cdot\cdot\frac{2015^2}{2016^2-1}$$

$$= \frac{3^2}{3\cdot5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot7}\cdot\frac{7^2}{7\cdot9}\cdot\ldots\cdot\frac{2015^2}{2015\cdot2017}$$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2017} = \frac{3}{2017} < \frac{3}{1936}$. .... (1p)

$\begin{cases} a^2 > \frac{2}{2025} \\ a^2 < \frac{3}{1936} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2025} < a^2 < \frac{3}{1936} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{45} < a < \frac{\sqrt{3}}{44} \Rightarrow a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{45}; \frac{\sqrt{3}}{44}\right)$ ....(1p)

SUBIECTUL 2 (7p=4p +3p)

a) Determinați valoarea minimă a expresiei $\boldsymbol{E(x,y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2}}$, $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$.
Precizați valorile lui x și y pentru care se realizează acest minim.

b) Determinați numerele reale x, y, z știind că: $\boldsymbol{x + y + z = \frac{3}{2}}$ și $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}}$.

Soluție: **a)** Aplicăm de două ori inegalitatea (MA-MG)

$E(x) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} \geq 2\sqrt{x^4y^4} + \frac{2}{x^2y^2} = 2\left(x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \geq 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 4$.... (2p)

Cele două inegalități trebuie să devină egalități și acest lucru se întâmplă dacă pe de o parte $x^4 = y^4 \Leftrightarrow x = \pm y$, iar pe de altă parte $x^2y^2 = \frac{1}{x^2y^2} \Leftrightarrow (xy)^4 = 1 \Leftrightarrow xy = \pm 1$. ....(1p)
Se obțin imediat soluțiile $(x, y) \in \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$ ....(1p)

b) Facem substituțiile $x - \frac{1}{2} = a, y - \frac{1}{2} = b, z - \frac{1}{2} = c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

Avem $a + b + c = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = (x + y + z) - \frac{3}{2} = 0$ (*) .... (1p)

Relația $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ devine : $\left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 + b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 + c + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, de unde rezultă ținând cont de (*) : $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$. ....(1p)

Deci: $x = y = z = \frac{1}{2}$......... .... (1p)

<u>SUBIECTUL 3 (7p)</u>

Considerăm în spațiu punctele A, B, C, D și M, N mijloacele segmentelor [AB], respectiv [CD]. Demonstrați că, dacă $\boldsymbol{MN = \frac{BC+AD}{2}}$, atunci punctele A, B,C, D sunt coplanare.

Soluție : Fie E mijlocul segmentului (AC). ....(1p)

În $ME = \frac{BC}{2}, NE = \frac{AD}{2}$ (linii mijlocii în triunghiuri) ....(2p)

$ME + NE = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = MN$ .... (1p)

$\Rightarrow M, E, N$ coliniare ....(1p)

Din $ME \parallel BC, EN \parallel AD$ avem BC$\parallel AD$, deci A, B,C, D coplanare. .... (2p)

<u>SUBIECTUL 4 (7p)</u>

Fie un cub ABCDA'B'C'D', de latură 4cm și P un punct interior cubului.

a) Demonstrați că suma distanțelor de la P la fețele cubului este constantă.

b) Demonstrați că suma distanțelor de la P la vârfurile cubului este mai mare sau egală cu $\mathbf{16\sqrt{3}}$.

c) Dacă $\boldsymbol{P} \in [\boldsymbol{BD'}]$ astfel încât BP=3PD' calculați suma distanțelor la muchiile laterale AA', BB', CC', DD'.

Soluție:

a)Distanțele la 2 fețe opuse sunt x și 4-x, deci suma este 3·4=12 .... (2p)

b)Suma distanțelor la 2 vârfuri diagonal opuse este mai mare decât lungimea diagonalei ....(1p)

Avem 4 perechi de vârfuri deci suma este $4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$....................................... (1p)

c)Pentru simplitate se proiectează punctual P pe o bază .... (1p)

Calculul sumei .... (2p)