

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-21 februarie 2016
Filiera teoretică: profilul uman

Clasa XII

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$,

a) Să se calculeze A^2 și A^3 .

b) Să se studieze dacă există numerele reale x, y astfel încât $A^3 = xA^2 + yA + I_3$.

Soluție :

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4p

b) $A^3 = xA^2 + yA + I_3 \Rightarrow x = 3, y = -3$

3p

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

a) Calculați $A^2 + A - B$, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Determinați matricea X cu proprietatea $2 \cdot (B - A) + X = 3 \cdot A^2$

c) Calculați $2016A^{2016} + 2015A^{2015} + \dots + 2A^2 + A$, unde $A^{n+1} = A^n \cdot A, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Soluție :

a) $A^2 = A, A^2 + A - B = O_2$

2p

b) $A^2 = A \Rightarrow 2 \cdot (B - A) + X = 3 \cdot A \Rightarrow X = A$

2p

c) Observă $A^2 = A \Rightarrow A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 2016A^{2016} + 2015A^{2015} + \dots + 2A^2 + A = (1 + 2 + \dots + 2016)A = 2017 \cdot 1008A$

3p.

3. Se consideră matricele $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, definite prin:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \max(i, j), & i \neq j \end{cases}, b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \min(i, j), & i \neq j \end{cases}.$$

a) Aflați matricele A și B .

b) Să se calculeze $A^2, B^2, A \cdot B - B \cdot A$, unde $M^2 = M \cdot M, \forall M \in M_3(\mathbf{R})$.

c) Determinați matricea X care verifică relația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Soluție :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3p

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 6 \\ 9 & 13 & 6 \\ 6 & 6 & 18 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3p

c) Considerînd matricea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ obținem sistemul $\begin{cases} 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3z = 5 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1p

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ cu $a + d \neq 0$.

a) Demonstrați că $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

b) Să se demonstreze că $AB = BA, B \in M_2(\mathbf{R})$ dacă și numai dacă matricea $BA^2 = A^2B$

Soluție :

a) Calcul direct

b) Înmulțind relația $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ la stânga și la dreapta se obține: 4p

$$BA^2 - (a + d) \cdot BA + (ad - bc) \cdot B = O_2$$

$$A^2B - (a + d) \cdot AB + (ad - bc) \cdot B = O_2$$

Scăzând cele două relații obținem: $A^2B - BA^2 = (a + d) \cdot (AB - BA)$ 3p