

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-28 februarie 2015

Filiera teoretică: profilul uman

Clasa a X-a

1. a) Aduceți la o formă mai simplă expresia :

$$E(x, y) = \frac{x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \quad x \neq y, x, y \in \mathbf{R}.$$

b) Comparați numerele 9999^{10} și 10^{40} .

Soluție :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad E(x, y) &= \frac{x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} \end{aligned} \quad 4\text{p}$$

$$\text{b)} \quad 9999^{10} < 10000^{10}, 10000^{10} = (10^4)^{10} = 10^{40} \quad 3\text{p}$$

2. a) Determinați $x \in \mathbf{Q}$ dacă $\sqrt{\frac{3\sqrt{27}}{\sqrt[3]{27}}} = 3^x$.

b) Arătați că numărul $\sqrt{15+6\sqrt{6}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ este natural.

Soluție :

$$\text{a)} \quad \sqrt{\frac{3\sqrt{27}}{\sqrt[3]{27}}} = 3^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \quad 3\text{p}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{15+6\sqrt{6}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 5 \quad 4\text{p}$$

3. a) Demonstrați egalitatea $\log_{ab} n = \frac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n}$, unde $a, b, n \in (0; +\infty) - \{1\}$

b) Calculați: $M = a^{\frac{\ln b}{c}} \cdot b^{\frac{\ln c}{a}} \cdot c^{\frac{\ln a}{b}}, a, b, c \in (0; +\infty) - \{1\}$

Soluție :

$$\text{a)} \quad \frac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n} = \frac{\frac{1}{\log_n a} \cdot \frac{1}{\log_n b}}{\frac{1}{\log_n a} + \frac{1}{\log_n b}} = \frac{1}{\log_n a + \log_n b} = \frac{1}{\log_n ab} = \log_{ab} n \quad 3\text{p}$$

$$M = a^{\frac{\ln b}{c}} \cdot b^{\frac{\ln c}{a}} \cdot c^{\frac{\ln a}{b}} \Rightarrow \ln M = \ln a^{\frac{\ln b}{c}} \cdot b^{\frac{\ln c}{a}} \cdot c^{\frac{\ln a}{b}} = \ln a^{\frac{\ln b}{c}} + \ln b^{\frac{\ln c}{a}} +$$

$$\begin{aligned} \text{b) } + \ln c^{\frac{\ln a}{b}} &= (\ln b - \ln c) \ln a + (\ln c - \ln a) \ln b + (\ln a - \ln b) \ln c = 0 \\ &\Rightarrow M = 1 \end{aligned} \quad 4\text{p}$$

4. Fie $x = \log_{\sqrt{7}}(7 \cdot \sqrt[3]{49}) + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

a) Demonstrați că $x \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $p \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $2^p = 3$ **calculați** $a = \log_2(6\sqrt[3]{x^2})$ **în funcție de** p **și** x **determinat la punctul a)**

c) Calculați $b = 3^{\frac{1 + \log_{\frac{1}{3}} x}{3}}$, **unde** x **este cel determinat la punctul a)**

Soluție :

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \log_{\sqrt{7}}(7 \cdot \sqrt[3]{49}) + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 2(\log_7 7 + \log_7 7^{\frac{2}{3}}) + \frac{2}{3} = \\ &= 2\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 4 \end{aligned} \quad 3\text{p}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } p &= \log_2 3 \\ a &= \log_2(6\sqrt[3]{x^2}) = \log_2(6 \cdot 4^{\frac{2}{3}}) = \log_2 6 + \log_2 2^{\frac{4}{3}} = 1 + p + \frac{4}{3} = \\ &= p + \frac{7}{3} \end{aligned} \quad 2\text{p}$$

$$\text{c) } b = 3^{\frac{1 + \log_{\frac{1}{3}} x}{3}} = 3 \cdot 3^{\frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{3}} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad 2\text{p}$$