

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală – 21 februarie 2016
Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa a XII-a

1. Pe R se consideră legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2, \forall x, y \in R$.

a) Să se calculeze $y \circ (-1)$

b) Să se arate că $(-2016) \circ (-2011) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2016 + 3 > 0$

c) Să se găsească două numere $a, b \in R - Q$ cu proprietatea că $a \circ b \in \mathbb{N}$.

★ ★ ★

Soluție:

a) $y \circ (-1) = -1$ 2p

b) $(-2012) \circ (-2011) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2012 = -1$ 1p

$(-2012) \circ (-2011) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2012 + 3 = 2$ 1p

$(-2012) \circ (-2011) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2012 + 3 > 0$ 1p

c) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ sau alte valori 2p

2. Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) \in M_2(R) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ și $f: R \rightarrow G$,

$$f(x) = A(x+k), k \in R.$$

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall) A(x), A(y) \in G$.

b) Știind că (G, \cdot) este grup, determinați $k \in R$ astfel încât f să fie morfism de grupuri între grupurile $(R, +)$ și (G, \cdot) .

c) Determinați $x \in R$ astfel încât $A(x) \circ A^2(x) \circ \dots \circ A^{2016}(x) = A(2016)$. ★ ★ ★

Soluție:

a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y), (\forall) A(x), A(y) \in G$ 2p

b) f morfism al celor două grupuri date $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in R$.
 $\Leftrightarrow A(x+y+k) = A(x+y+2k) \Leftrightarrow k = 0$. 2p

c) Demonstrarea prin metoda inducție matematică

$A^n(x) = A(nx), \forall n \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{R}$ 1p

$A(x) \cdot A^2(x) \cdot \dots \cdot A^{2016}(x) = A\left(\frac{x \cdot 2016 \cdot 2017}{2}\right)$ 1p

$x = \frac{2}{2017}$ 1p

3. Fie $a > 0$ și funcțiile $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}, F(x) = \ln(a + \ln x)$.

a) Arătați că F este o primitivă a lui f pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Pentru $a = 2$, determinați primitiva F a funcției f pe intervalul $[1, +\infty)$ cu proprietatea că $F(e^2) = \ln 4$. ***

Soluție.

a) Folosind prima schimbare de variabilă, pentru $u = \ln x$ și $du = \frac{1}{x} dx$ prin înlocuire, se obține că F este o primitivă a lui f pe intervalul $[1, +\infty)$. 4p

b) Pentru $a = 2$, fie $F(x) = \ln(2 + \ln x) + C$ o primitivă a lui f pe intervalul $[1, +\infty)$.

Dar, $F(e^2) = \ln 4 + C = \ln 4$, deci $C = 0$, iar primitiva căutată este

$F(x) = \ln(2 + \ln x)$. 3p

4. Se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

a) Calculați I_1 și I_2 .

b) Arătați că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. ***

Soluție:

a) $I_1 = 1 - \ln 2$ 2p

$I_2 = -\frac{1}{2} + \ln 2$ 2p

b) Demonstrarea egalității 3p