

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală: 21 februarie 2016

Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa X

1. Fie numărul $z_n = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n, n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați z_4 și z_{100} .

b) Determinați valorile naturale ale lui n pentru care $z_n = 1 + i$.

Soluție :

a) $z_4 = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = 1 + i - 1 - i + 1 = 1$

2p

$$z_{100} = 1 + i + \dots + i^{100} = \frac{i^{101} - 1}{i - 1} = 1$$

2p

b)
$$z_n = \frac{i^{n+1} - 1}{i - 1} = \begin{cases} 1, n = 4k \\ 1 + i, n = 4k + 1 \\ i, n = 4k + 2 \\ 0, n = 4k + 3 \end{cases}$$

3p

2. Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x}$

a) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției.

b) Comparați numerele $f\left(\frac{2}{3}\right)$ și $f\left(\frac{7}{10}\right)$

Soluție :

a) $-x^2 + 5x \geq 0$

1p

Rezolvarea ecuației și determinarea soluției $x \in [0, 5]$

2p

b) $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{26}}{3}$ și $f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{\sqrt{301}}{10}$

2p

Comparare și finalizare

2p

3. Fie $a = \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}$ și $b = \left(\frac{(\sqrt{3} - 1)^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3} - 1)^{-\sqrt{3}}} \right)^{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \left(\frac{(1 + \sqrt{3})^{4 + \sqrt{3}}}{(1 + \sqrt{3})^{2 + \sqrt{3}}} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

a) Demonstrați că a^3 este pătrat perfect.

b) Determinați numărul real b .

c) Comparați \sqrt{a} cu 2^b .

Soluție:

a) Calculează $a = \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt{3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3^{\frac{4}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}}$, $a^3 = 3^2$ 2p

b)
$$b = \left(\frac{(\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3}-1)^{-\sqrt{3}}} \right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{3})^{4+\sqrt{3}}}{(1+\sqrt{3})^{2+\sqrt{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left((\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left((1+\sqrt{3})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left((\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left((1+\sqrt{3})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3}-1)^{2-3} \cdot (\sqrt{3}+1)^{-1} = (3-1)^{-1} = \frac{1}{2}$$

2p

c) Specifică $\sqrt{a} > 0$ și $2^b > 0$

Calculează $(\sqrt{a})^6 = 9$, $(2^b)^6 = 8 \Rightarrow 2^b < \sqrt{a}$ 3p

4. Fie $a, b, c \in \mathbf{Q}$ astfel încât $\frac{\sqrt[3]{a}}{2} = \frac{\sqrt[3]{b}}{3} = \frac{\sqrt[3]{c}}{4}$. Calculați $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a+b+c}}$.

Soluție :

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{2} = \frac{\sqrt[3]{b}}{3} = \frac{\sqrt[3]{c}}{4} = k, k \in \mathbf{R}.$$

Notăm

Determină $\sqrt[3]{a} = 2k$, $\sqrt[3]{b} = 3k$, $\sqrt[3]{c} = 4k$ 3p

Deduce $a = 8k^3$, $b = 27k^3$, $c = 64k^3$ 1p

Înlocuiește în expresia de calculat și obține

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a+b+c}} = \frac{2k + 3k + 4k}{\sqrt[3]{8k^3 + 27k^3 + 64k^3}} = \frac{9k}{\sqrt[3]{99k^3}} =$$

$$= \frac{9k}{k\sqrt[3]{99}} = \frac{9}{\sqrt[3]{99}} = \frac{\sqrt[3]{9801}}{11} = \frac{3\sqrt[3]{363}}{11}$$

3p