

CLASA A IX-A - BAREM.

SUBIECTUL 1.

$n=1$ (1 punct)

$$\sqrt{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{2} <$$

$$\frac{(n+1)(n+3)}{2} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\sqrt{(n+1)(n+2)} < n + \frac{3}{2} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$2 < 9/4 \quad (2 \text{ puncte})$$

SUBIECTUL 2

$$a = b_1 q^{m-1}, \quad b = b_1 q^{n-1},$$

$$c = b_1 q^{p-1} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$[b_1 q^{m-1}]^{n-p} \dots \quad (2 \text{ puncte})$$

$$= (b_1^{n-p} \dots) \cdot (q^{(m-1)(n-p)} \dots) \quad (2 \text{ puncte})$$

$$= b_1^0 \cdot q^0 = 1 \quad (1 \text{ punct})$$

SUBIECTUL 3

Soluție. Cu notațiile $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, avem

$$\frac{1}{-4b+3a} = \frac{1}{-3c+4b} = \frac{1}{2a-3c} = \frac{1}{14} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \quad 1 \text{ punct}$$

$$a = 2b, \quad c = \frac{2}{3}b$$

2 puncte

$$\frac{1}{-4b+6b} = \frac{1}{14} \left(\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{9}{4b^2} \right) \quad 2 \text{ puncte}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad c = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

2 puncte

SUBIECTUL 4

Soluție. Fie X un punct în planul triunghiului ABC . Atunci

$$2 \text{ puncte} \quad 3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} \text{ și } 3\overrightarrow{XG'} = \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} =$$

$$2 \text{ puncte} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XP}) =$$

$$2 \text{ puncte} = 2 \frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}}{3} + \frac{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP}}{3} = 2\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{XG'},$$

$$\text{de unde } \overrightarrow{G'G''} = \frac{2\overrightarrow{GG''}}{3}. \quad 1 \text{ punct}$$

CLASA A X - A - BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_a 10 + \log_a 6 + \log_a 15 \quad (2 \text{ puncte})$$

$$= \log_a 900 \quad (2 \text{ puncte}) \quad \Bigg| \quad = 2 \log_a 30 \quad (1 \text{ puncte})$$

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a} = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5$$
$$= \log_a 30 \quad (2 \text{ puncte})$$

SUBIECTUL 2

$$f \text{ injectivă} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$f \text{ surjectivă} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x}) \quad (2 \text{ puncte})$$

$$f(1) = 1 \quad (1 \text{ puncte})$$

SUBIECTUL 3

2 puncte

Soluție. Cum $y \geq 1, z \geq 1$, rezultă că $\frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2^z} \leq \frac{1}{2}$, deci $\frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} \leq 1$.

Obținem $2^y + 2^z \leq 2^{y+z}$, de unde $\log_2(2^y + 2^z) \leq y + z$ și celelalte. Atunci

$$\sum x \log_2(2^y + 2^z) \leq \sum x(y + z) = 2 \sum xy \leq 2 \sum x^2. \quad 3 \text{ puncte}$$

SUBIECTUL 4

Soluție. Fie $r = |z_1| = |z_2| = |z_3|$. Avem $\bar{a} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 - z_2} = \frac{\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2}}{\frac{z_1}{r^2} - \frac{z_2}{r^2}} = \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} =$

3 puncte

$= -a$, deci a, b, c sunt numere pur imaginare. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ cu $a = ix, b = iy$

$c = iz$. Atunci $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+ix}{-1+ix}, \frac{z_2}{z_3} = \frac{1+iy}{-1+iy}, \frac{z_3}{z_1} = \frac{1+iz}{-1+iz}$, de unde, prin înmulțire
2 puncte
obținem $(-1+ix)(-1+iy)(-1+iz) = (1+ix)(1+iy)(1+iz)$ și apoi $xy + yz + zx = 1$

Pe de altă parte, din $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, adică
 $\sum (x-y)^2 = 0$ și deci $x = y = z$. Atunci $a = b = c$, ceea ce trebuia demonstrat.

2 puncte

CLASA A XI-A - BAREM

SUBIECTUL 1

$A = B^{-1}CB$ (sau $BA = CB$,
cu B inversabilă) (3 puncte)

$$A^n = B^{-1}C^nB \quad (2 \text{ puncte})$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n + (4^n - 2^n)\sin^2 \alpha & (4^n - 2^n)\sin \alpha \cos \alpha \\ (4^n - 2^n)\sin \alpha \cos \alpha & 2^n + (4^n - 2^n)\cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puncte})$$

SUBIECTUL 2

(x_n) recurentă (2 puncte), mărginită (2 puncte)

$$l^3 + l = 2 \quad (1 \text{ punct})$$

de unde deduce $l = 1$ (2 puncte)

SUBIECTUL 3

$\varphi(x) = f(x) + g(x) - u(x) - v(x)$ este continuă
(2 puncte)

$$\varphi(a) = g(a) - v(a) \geq 0 \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\varphi(b) = f(b) - u(b) \leq 0 \quad (2 \text{ puncte})$$

Finalizare (1 punct)

SUBIECTUL 4

Matrice Operatori, Baza, Transformare

1 punct

Soluție. Cum $(A - B)^2 = O_2$ obținem $\det(A - B) = 0$ și $\text{Tr}(A - B) = 0$.

2 puncte a) Fie $a = \text{tr} A = \text{tr} B$ și $b = \det A - \det B$. Din relația lui Cayley obținem
 $\det(A^2 - B^2) = \det(a(A - B) - bI_2) = \det(a(A - B)) - \text{tr}(a(A - B))b + b^2 = b^2$.

2 puncte b) Fie funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dată de $f(x) = \det(A^2 - B^2 + x(AB - BA))$.
Avem $f(x) = \det(A^2 - B^2) + cx + \det(AB - BA)x^2$.

Pe de altă parte, $f(1) = f(-1) = \det(A - B)\det(A + B) = 0$, de unde
reiese $c = 0$ și $\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA) = 0$. Folosind punctul anterior reiese
cerința. 2 puncte

CLASA A XII-A - BAREM

SUBIECTUL 1

$A_x \cdot A_y = A_{xy}$, cu $xy \neq 0$, deci G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ (2 puncte)

A_1 , elem. neutru (1 punct), $A_{1/x}$ simetricul lui A_x (1 punct)

$f: \mathbb{R}^* \rightarrow G$, $f(x) = A_x$ este bijectiv (2 puncte), $f(xy) = f(x)f(y)$ (1 punct)

SUBIECTUL 2

f injectiv (2 puncte), surjectiv (2 puncte)

$f: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ bijectiv (1 punct)

$x = f(t)$, $t \in [0, 1]$ schimbare de variabilă (1 punct), deci $I = 4/3$ (1 punct)

SUBIECTUL 3

Soluție. Avem 2 puncte

$$a_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{n^2}{k^2}\right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2}} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^2 \cdot b_n,$$

unde $b_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$ 2 puncte

Din criteriul radicalului obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Pe de altă parte, cum $\ln b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$, rezultă că

2 puncte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx =$$

$$= \ln 2 - 2(x - \arctg x) \Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

În consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2 \cdot e^{\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi}{2}}$. 1 punct

SUBIECTUL 4

4 puncte

Soluție. Fie $a \in Z(G)$ și $b \in G \setminus Z(G)$. Atunci $ab \in G \setminus Z(G)$, deci $(ab)^2 = e$, de unde $abab = e$, adică $aabb = e$. Cum $b^2 = e$, obținem $a^2 = e$, adică $x^2 = e$,

3 puncte

pentru orice $x \in G$, deci grupul este comutativ.

... conștiențele de aduna