

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau, de asemenea, câtul egal cu restul.

Dacă n este un număr cu proprietățile date, atunci $n = 17 \cdot c_1 + c_1 = 18c_1$, $c_1 < 17$ și $n = 23 \cdot c_2 + c_2 = 24c_2$, $c_2 < 23$.	2p
$18c_1 = 24c_2$, de unde $3c_1 = 4c_2$.	2p
Ceea ce înseamnă că c_1 este multiplu de 4 și $c_1 < 17$, atunci $c_1 \in \{4, 8, 12, 16\}$.	2p
De unde $n \in \{72, 144, 216, 288\}$.	1p

SUBIECTUL 2

- a) Fie numerele $a = 7^7 + 7^7 + 77$ și $b = 7 + 7$. Aflați restul împărțirii numărului a la b .
b) Se poate scrie numărul $N = 1 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \dots + 6 \cdot 7^{76}$ folosind numai trei cifre de 7 ?

a) $7^7 + 7^7 + 77 = 2 \cdot 7^7 + 77 = 14 \cdot 7^6 + 70 + 7 = 14(7^6 + 5) + 7$, restul este 7.	3p
b) $N = 1 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \dots + 6 \cdot 7^{76} = 7 + (7-1) \cdot 7 + (7-1) \cdot 7^2 + \dots + (7-1) \cdot 7^{76}$	2p
$= 7 + 7^2 - 7 + 7^3 - 7^2 + \dots + 7^{77} - 7^{76}$	1p
$= 7^{77}$.	1p

SUBIECTUL 3

- a) Arătați că egalitatea $x^2 + y^3 = z^5$ este verificată pentru $x = 2^{12}$, $y = 2^8$, $z = 2^5$.
b) Arătați că există o infinitate de numere naturale x, y, z pentru care $x^2 + y^3 = z^5$.

a) $(2^{12})^2 + (2^8)^3 = (2^5)^5$	1p
$2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$	1p
$2^{24} \cdot 2 = 2^{25}$.	1p
b) Dacă luăm exemplul dat la a) exponentul lui 2 se poate lua de forma $30n + 24$.	2p
Și atunci $x = 2^{15n+12}$, $y = 2^{10n+8}$, $z = 2^{6n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.	1p
Egalitatea $2^{30n+24} + 2^{30n+24} = 2^{30n+25}$ arată că există o infinitate de numere naturale x, y, z pentru care $x^2 + y^3 = z^5$.	1p

SUBIECTUL 4

- a) Scrieți trei numere de forma \overline{abca} divizibile cu 13.
b) Câte numere de forma \overline{abca} sunt divizibile cu 13 ?

a) Pentru fiecare exemplu 1p.	3p
b) $\overline{abca} = 1001a + 10 \cdot bc$. Cum $1001a : 13$, oricare ar fi cifra a de la 1 la 9, rezultă că \overline{bc} sunt multiplii lui 13 de două cifre, inclusiv 00, în total 8.	2p
Și atunci există $9 \cdot 8 = 72$ numere de forma \overline{abca} divizibile cu 13.	2p

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Arătați că numărul **53361** este pătrat perfect și se divide cu 33.

b) Câte numere de forma **abcde** sunt pătrate perfecte și se divid cu 33 ?

a) $53361=3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2=(3 \cdot 7 \cdot 11)^2$, este pătrat perfect și se divide cu 33.	3p
b) Dacă abcde este pătrat perfect și se divide cu 33, atunci el se divide cu $33^2=1089$.	2p
Numerele de cinci cifre abcde pătrate perfecte care se divid cu 33 se obțin calculând: $1089 \cdot 4^2, 1089 \cdot 5^2, \dots, 1089 \cdot 9^2$.	1p
Sunt 6 numere.	1p

SUBIECTUL 2

a) Calculați $\frac{9^5 + 8 \cdot 3^5 + 12}{3^6 + 6}$.

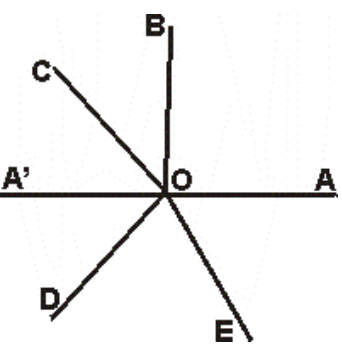
b) Arătați că pentru orice număr natural nenul n , numărul $\frac{9^n + 8 \cdot 3^n + 12}{3^{n+1} + 6}$ este natural.

a) Calcul numărător(61005).	1p
Calcul numitor(735).	1p
Rezultat 83.	1p
b) $\frac{9^n + 8 \cdot 3^n + 12}{3^{n+1} + 6} = \frac{3^{2n} + 2 \cdot 3^n + 6 \cdot 3^n + 12}{3 \cdot 3^n + 6}$	1p
$= \frac{3^n(3^n + 2) + 6(3^n + 2)}{3(3^n + 2)}$	1p
$= \frac{(3^n + 2)(3^n + 6)}{3(3^n + 2)}$	1p
$= \frac{3^n + 6}{3} = 3^{n-1} + 2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1p

OBS: Dacă rezolvă direct b) și înlocuiește $n=5$, obținând $3^4+2=83$, obține punctaj maxim.

SUBIECTUL 3

Fie unghiurile **AOB**, **BOC**, **COD**, **DOE**, **EOA** în jurul punctului **O**, astfel încât $1 \cdot m(\angle AOB) = 2 \cdot m(\angle BOC)$, $3 \cdot m(\angle COD) = 4 \cdot m(\angle DOE)$, $5 \cdot m(\angle DOE) = 6 \cdot m(\angle EOA)$. Dacă semidreapta **[OA** și bisectoarea unghiului **COD** formează un unghi alungit, aflați măsurile celor cinci unghiuri.

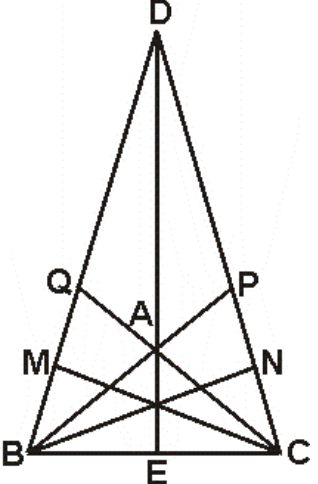
	Se poate nota $m(\angle BOC) = x$, $m(\angle AOB) = 2x$, $m(\angle COD) = 4y$, $m(\angle DOE) = 3y$, $m(\angle EOA) = \frac{5}{2}y$. Iar dacă [OA' este bisectoarea unghiului COD , atunci $m(\angle COA') = m(\angle DOA') = 2y$. Sau scrie $m(\angle COD) = \frac{4}{3} \cdot m(\angle DOE)$ și $m(\angle EOA) = \frac{5}{6} \cdot m(\angle DOE)$.	1p
	Avem: $2y + 3y + \frac{5}{2}y = 180^\circ$. Sau $\frac{2}{3} \cdot m(\angle DOE) + m(\angle DOE) + \frac{5}{6} \cdot m(\angle DOE) = 180^\circ$.	2p
	$y = 24^\circ$ și de aici $m(\angle COD) = 96^\circ$, $m(\angle DOE) = 72^\circ$, $m(\angle EOA) = 60^\circ$.	2p
	$m(\angle AOC) = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ = 3x$, de unde $x = 44^\circ = m(\angle BOC)$ și $m(\angle AOB) = 88^\circ$.	2p

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul obtuzunghic isoscel ABC de bază $[BC]$. Pe bisectoarea unghiului C se ia punctul M , iar pe bisectoarea unghiului B se ia punctul N , astfel încât $m(\angle BMC) = m(\angle BNC) = 90^\circ$.

Dacă $BM \cap AC = \{Q\}$, $CN \cap AB = \{P\}$, $BM \cap CN = \{D\}$, iar E este mijlocul laturii $[BC]$, demonștrați:

- $[BP] \equiv [BC] \equiv [QC]$.
- Punctele D, A, E sunt coliniare.

	a) $\triangle BNC \equiv \triangle BNP$ (ULU) $\Rightarrow [BP] \equiv [BC]$.	1p
	$\triangle CMB \equiv \triangle CMQ$ (ULU) $\Rightarrow [BC] \equiv [QC]$.	1p
	Și atunci $[BP] \equiv [BC] \equiv [QC]$.	1p
	b) $\triangle QBC \equiv \triangle PCB$ (LUL) $\Rightarrow \angle QBC \equiv \angle PCB \Rightarrow \angle DBC \equiv \angle DCB \Rightarrow \triangle DBC \equiv \triangle DCB$ (ULU) $\Rightarrow [DB] \equiv [DC]$ (Sau scrie direct $\angle QBC \equiv \angle PCB \Rightarrow [DB] \equiv [DC]$).	2p
	$\triangle DAB \equiv \triangle DAC$ (LLL) $\Rightarrow [DA]$ este bisectoarea unghiului D . $\triangle DEB \equiv \triangle DEC$ (LLL) $\Rightarrow [DE]$ este bisectoarea unghiului D . Și atunci D, A, E sunt coliniare. Sau arată că $[AD]$ și $[AE]$ sunt biseectoarele unghiurilor opuse la vârf PAQ , respectiv BAC .	2p

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Arătați că egalitatea $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = \frac{1}{10}$ este verificată pentru $x=14$ și $y=58$. Dați alt exemplu de numere naturale pentru care egalitatea este verificată.

b) Dacă x și y sunt numere raționale pozitive și $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = \frac{1}{10}$, calculați valoarea expresiei

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2}.$$

a) Verificare	1p
Un exemplu	2p
Exemple: (10, 218), (11, 118), (13, 68), (14, 58), (17, 43), (19, 38), (29, 28), (34, 26), (49, 23), (59, 22), (109, 20), (209, 19).	
b) $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2} = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+2-2}{y+2}$	2p
$= 2 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} \right)$	1p
$= 2 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10}.$	1p

OBS: Dacă alege să adune în ambii membri ai egalității $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = \frac{1}{10}$ pe $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2}$ (2p).

Apoi dacă scrie $2 = \frac{1}{10} + \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2}$ (1p) și $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2} = \frac{19}{10}$ (1p).

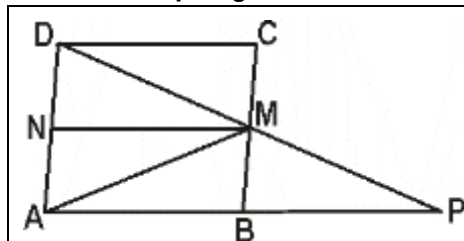
SUBIECTUL 2

Se consideră ecuația: $9^x + 27^y = z(z+1)$ unde x, y, z sunt numere naturale.

- Găsiți trei soluții ale ecuației date.
- Arătați că ecuația dată are o infinitate de soluții.

a) Fiecare exemplu 1p. Exemple de soluții: (0, 0, 1), (3, 1, 3 ³), (6, 2, 3 ⁶).	3p
b) Ecuația dată se mai scrie: $3^{2x} + 3^{3y} = z(z+1)$.	2p
Pentru a scrie membrul stâng ca produs de două numere naturale consecutive luăm $2x=2 \cdot 3y$ sau $3y=2 \cdot 2x$.	1p
Din prima relație obținem tripletele (3n, n, 3 ³ⁿ), $n \in \mathbb{N}$, iar din a doua (3m, 4m, 3 ^{6m}), $m \in \mathbb{N}$. (Suficient o formă).	1p

SUBIECTUL 3 Fie M mijlocul laturii [BC] a paralelogramului ABCD. Demonstrați că dacă $\angle MDC = \angle MAB$, atunci ABCD este dreptunghi.

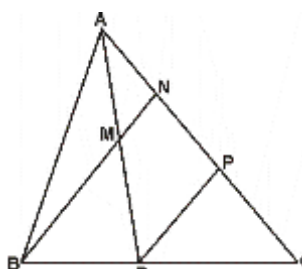


BAREM 1: Dacă N este mijlocul laturii [AD] $\Rightarrow \angle AMN = \angle MAB$ și $\angle DMN = \angle MDC$.	3p
MN este mediană și bisectoare, rezultă $MN \perp AD$.	3p
Cum $MN \parallel AB$, se obține $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și atunci ABCD este dreptunghi.	1p
BAREM 2: Dacă $\{P\} = DM \cap AB$, atunci $\triangle MAP$ este isoscel din $\angle MAP = \angle MDC = \angle MPA$.	3p
MB este mediană în $\triangle MAP$ isoscel de bază AP, rezultă $MB \perp AB$.	3p
ABCD fiind paralelogram cu $m(\angle B) = 90^\circ$ este dreptunghi.	1p

SUBIECTUL 4 Fie triunghiul ABC cu AB = 27 cm, BC = 30 cm, AC = 33 cm și (AD bisectoarea unghiului A, D ∈ (BC).

a) Aflați BD și DC.

b) Dacă $M \in (AD)$, astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{5}{6}$ și $BM \cap AC = \{N\}$, aflați AN.

	a) Din teorema bisectoarei $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{27}{33} = \frac{9}{11}$.	2p
	$\frac{BD}{BC} = \frac{9}{20} \Rightarrow BD = 13,5$ și $DC = 16,5$.	1p
	b) În $\triangle ADC$ se aplică teorema lui Menelaus pentru transversala B-M-N $\frac{BD}{BC} \cdot \frac{NC}{AN} \cdot \frac{AM}{MD} = 1$	2p
	$\Rightarrow \frac{9}{20} \cdot \frac{NC}{AN} \cdot \frac{5}{6} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{3}{11}$. Cum $AC = 33 \Rightarrow AN = 9$.	2p

VARIANTĂ DE NOTARE PENTRU b)

Construiește DP BN și scrie teorema lui Thales în $\triangle ADP$ și în $\triangle BCN$ $\frac{AN}{NP} = \frac{AM}{MD} = \frac{5}{6}$ și $\frac{PC}{NP} = \frac{DC}{BD} = \frac{11}{9}$.	2p
Se obține ecuația $AN + \frac{6}{5}AN + \frac{22}{15}AN = 33 \Rightarrow AN = 9$.	2p

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

- a) Scrieți trei numere reale x, y, z , unul să fie rațional negativ, iar celelalte două să fie iraționale, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.
- b) Fie x, y, z numere reale, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 27$. Arătați că $|x + y + z| \leq 9$.

a) Un exemplu scris astfel: $x = -4 \in \mathbb{Q}, y = \sqrt{5} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, z = \sqrt{6} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.	3p
b) Se știe că $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.	2p
De unde $xy + yz + zx \leq 27, 2xy + 2yz + 2zx \leq 54$ și $(x + y + z)^2 \leq 81$.	1p
rezultă $ x + y + z \leq 9$.	1p

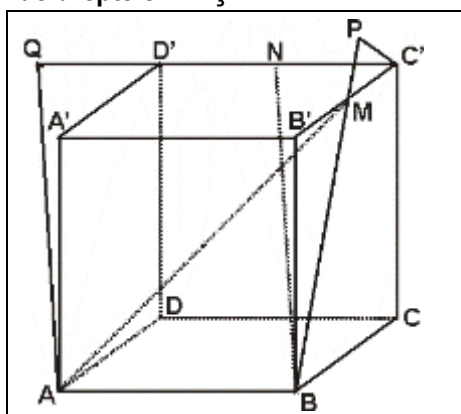
OBS: Dacă alege metoda reducerii la absurd se utilizează aceeași inegalitate de **2p**: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

SUBIECTUL 2

- a) Dacă x este număr real și $x(x + 1) = 12$, calculați valoarea expresiei $E(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$.
- b) Arătați că $A = \sqrt{a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a}$ este irațional, oricare ar fi a număr natural nenul.

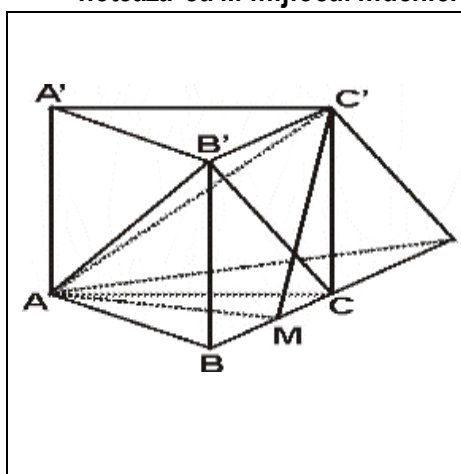
a) $E(x) = x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x^2 + x = x^3(x+1) + x^2(x+1) + x(x+1)$ (sau altă grupare)	1p
$= x(x+1)(x^2 + x + 1) = 12(12+1) = 156$.	2p
OBS: Dacă rezolvă ecuația $x^2 + x - 12 = 0$ (1p) și câte 1p pentru fiecare înlocuire.	
b) Conform descompunerii de la punctul a) avem $a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a = (a^2 + a)(a^2 + a + 1)$.	2p
Dacă $a^2 + a = n$, atunci $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ sau scrie că produsul a două numere naturale consecutive nu este pătrat perfect deoarece este cuprins între două pătrate perfecte consecutive.	2p

SUBIECTUL 3 Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia de lungime 10 cm. Dacă M este mijlocul muchiei $[B' C']$, iar N este mijlocul muchiei $[C' D']$, aflați distanța de la punctul C' la planul (ABM) și cosinusul unghiului format de dreptele AM și BN .

	$AB \perp (BCC')$ și $AB \subset (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (BCC')$ și atunci $d(C', (ABM)) = d(C', BM)$, unde $BM = (ABM) \cap (BCC')$.	1p
	$C'P$ este înălțime în $\Delta C'MB$, $C'P = 2\sqrt{5}$.	2p
	OBS: Dacă obține distanța, fără a arăta care este, primește 3p .	
	Fie $AQ \parallel BN$, $Q \in D'C' \Rightarrow m(\angle(AM, BN)) = m(\angle(AM, AQ)) = m(\angle MAQ)$. Se obține triunghiul isoscel AMQ cu $AM = AQ = 15$ cm și $MQ = 5\sqrt{10}$.	2p
	$\cos(\angle MAQ) = \frac{4}{9}$.	2p

SUBIECTUL 4

Într-o prismă triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ raportul dintre latura bazei și înălțime este $\sqrt{2}$. Se notează cu M mijlocul muchiei $[BC]$. Arătați că $B' C \perp C' A$ și $(B' AC) \perp (AMC')$.

	Fie $C'N \parallel B' C$, $N \in BC$, rezultă $m(\angle(B' C, C' A)) = m(\angle(C' N, C' A))$.	1p
	Dacă a este înălțimea prisme, atunci latura bazei este $a\sqrt{2}$, $C'N = B' C = C' A = a\sqrt{3}$, $AN = \sqrt{BN^2 - AB^2} = a\sqrt{6}$.	1p
	Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă $m(\angle AC'N) = 90^\circ \Rightarrow B' C \perp C' A$.	1p
	Dacă demonstrează că $B' C$ este perpendiculară pe AM sau $C' M$.	2p
	Avem $B' C \perp C' A$, $B' C \perp AM$, $C' A \cap AM = \{A\} \Rightarrow B' C \perp (AMC')$.	1p
	$B' C \perp (AMC'), B' C \subset (B' AC) \Rightarrow (B' AC) \perp (AMC')$.	1p

PENTRU CELE **2p** din barem unde-i cere să demonstreze că $B' C$ este perpendiculară pe AM sau $C' M$:

VARIANTA 1 $AM \perp BC$, $AM \perp CC'$, $BC \cap CC' = \{C\} \Rightarrow AM \perp (BCC')$, $B' C \subset (BCC') \Rightarrow B' C \perp AM$.

VARIANTA 2 Notează $B' C \cap C' M = \{P\}$. Calculează $PM = \frac{1}{3} C' M = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $PC = \frac{1}{3} B' C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ și cu reciproca teoremei lui Pitagora rezultă $m(\angle MPC) = 90^\circ \Rightarrow B' C \perp C' M$.