

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI  
Etapa locală-21 februarie 2016  
Filiera teoretică: profilul uman

Clasa XII

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ ,

a) Să se calculeze  $A^2$  și  $A^3$ .

b) Să se studieze dacă există numerele reale  $x, y$  astfel încât  $A^3 = xA^2 + yA + I_3$ .

\*\*\*

2. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ .

a) Calculați  $A^2 + A - B$ , unde  $A^2 = A \cdot A$ .

b) Determinați matricea  $X$  cu proprietatea  $2 \cdot (B - A) + X = 3 \cdot A^2$

c) Calculați  $2016A^{2016} + 2015A^{2015} + \dots + 2A^2 + A$ , unde  $A^{n+1} = A^n \cdot A, \forall n \in N^*$ .

\*\*\*

3. Se consideră matricele  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ , definite prin:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \max(i, j), & i \neq j \end{cases}, b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \min(i, j), & i \neq j \end{cases}.$$

a) Aflați matricele  $A$  și  $B$ .

b) Să se calculeze  $A^2, B^2, A \cdot B - B \cdot A$ , unde  $M^2 = M \cdot M, \forall M \in M_3(\mathbf{R})$ .

c) Determinați matricea  $X$  care verifică relația  $A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

\*\*\*

4. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}), a, b, c, d \in \mathbf{R}$  cu  $a + d \neq 0$ .

a) Demonstrați că  $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ .

b) Să se demonstreze că  $AB = BA, B \in M_2(\mathbf{R})$  dacă și numai dacă matricea  $BA^2 = A^2B$

\*\*\*

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.