

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI

Etapă locală – 21 februarie 2016
Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa a XII-a

1. Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $y \circ (-1)$

b) Să se arate că $(-2016) \circ (-2011) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2016 + 3 > 0$

c) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $a \circ b \in \mathbb{N}$.

(***)

2. Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) \in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = A(x+k), k \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y), (\forall) A(x), A(y) \in G$.

b) Știind că (G, \cdot) este grup, determinați $k \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (G, \cdot) .

c) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(x) \circ A^2(x) \circ \dots \circ A^{2016}(x) = A(2016)$.

(***)

3. Fie $a > 0$ și funcțiile $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}, F(x) = \ln(a + \ln x)$.

a) Arătați că F este o primitivă a lui f pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Pentru $a = 2$, determinați primitiva F a funcției f pe intervalul $[1, +\infty)$ cu proprietatea că $F(e^2) = \ln 4$.

(***)

4. Se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1 și I_2 .

b) Arătați că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(***)

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.