

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală Dâmbovița – 21 Februarie 2016

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} < \frac{n(n+2)}{2}.$$

Subiectul 2. Într-o progresie geometrică, termenii de rang m, n, p sunt respectiv a, b, c (nenuli). Demonstrați că: $a^{n-p} \cdot b^{p-m} \cdot c^{m-n} = 1$.

Subiectul 3. Rezolvați în numere reale sistemul:

$$\frac{xy}{-4x+3y} = \frac{yz}{4z-3y} = \frac{zx}{2z-3x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{14}.$$

GM

Subiectul 4. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CAP cu centrele C_1, A_1 , respectiv B_1 . Notăm cu G, G', G'' centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC, A_1B_1C_1$, respectiv MNP . Demonstrați că: $\overrightarrow{G'G''} = \frac{2\overrightarrow{GG''}}{3}$.

GM

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală Dâmbovița – 21 Februarie 2016

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $x = \lg a$, $y = \log_6 a$, $z = \log_{15} a$. Demonstrați că:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a}.$$

Subiectul 2. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $f(f(x)) = x^2$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

a) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

b) Arătați că: $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x})$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

c) Calculați $f(1)$.

Subiectul 3. Demonstrați că, pentru orice numere reale $x, y, z \geq 1$, avem:

$$x \log_2(2^y + 2^z) + y \log_2(2^z + 2^x) + z \log_2(2^x + 2^y) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

GM

Subiectul 4. Se consideră trei numere distincte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu modulele egale și definim:

$$a = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}, \quad b = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3}, \quad c = \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}.$$

Demonstrați că, dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$, atunci $a = b = c$.

GM

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița – 21 Februarie 2016

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 3 - \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 3 + \cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $A = B^{-1}CB$, apoi calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit, pentru orice număr natural $n \geq 1$, prin relația:

$$x_n^3 + x_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este monoton, mărginit, apoi aflați limita sa.

Subiectul 3. Fie $f, g, u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$, $f(x) \leq u(x)$ și $g(x) \geq v(x)$. În plus, $f(a) = u(a)$ și $g(b) = v(b)$. Demonstrați că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) + g(c) = u(c) + v(c)$.

Subiectul 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice astfel încât $(A - B)^2 = 0_2$.

a) Arătați că: $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$.

b) Demonstrați echivalența: $\det(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow \det A = \det B$.

GM

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală Dâmbovița - 21 Februarie 2016

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstrați că mulțimea

$$G = \left\{ A_x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A_x = \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^* \right\},$$

înzestrată cu operația de înmulțire a matricelor, este grup. Este izomorf cu (\mathbb{R}^*, \cdot) ?

Subiectul 2. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită pentru orice număr real x prin formula $f(x) = x^5 + x$, este bijectivă, apoi calculați:

$$\int_0^2 f^{-1}(x) \, dx.$$

Subiectul 3. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{n^2}{k^2} \right)}.$$

GM

Subiectul 4. Fie (G, \cdot) un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$. Arătați că, dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.

GM