

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2016
Clasa a IX-a



1. a) Să se arate că $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Să se rezolve ecuația $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{x+3}{2}, x \in \mathbb{R}$.
2. a) Să se demonstreze că $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ nu este număr natural.
3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic înscris în cercul de centru O și rază R , iar P și Q simetricele ortocentrului și vârfului A față de mijlocul laturii BC .
a) Arătați că P este punctul diametral opus lui A în $\mathcal{C}(O, R)$.
b) Demonstrați că $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$.
4. a) Fie x, y numere reale cu $x \cdot y \geq 0$. Să se arate că $|x+z| + |y+z| \leq |x+y+z| + |z|, \forall z \in \mathbb{R}$.
b) Demonstrați că $|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geq |x+y| + |y+z| + |z+x|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.



1. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Demonstrați că $a = b = c$.
 b) Rezolvați ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$ în mulțimea numerelor reale.
2. a) Fie $z, w \in \mathbb{C}$. Demonstrați că $|z - w|^2 + |z - iw|^2 + |z + w|^2 + |z + iw|^2 = 4|z|^2 + 4|w|^2$.
 b) Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 și M un punct situat pe cercul circumscris pătratului. Demonstrați că $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4$.
3. a) Fie $x, y > 0$. Demonstrați că $(x + y)^4 \geq 8xy(x^2 + y^2)$.
 b) Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2016} > 0$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2016}^2 \geq 1$. Demonstrați că:

$$\frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} + \frac{(a_2 + a_3)^4}{a_2 a_3} + \dots + \frac{(a_{2015} + a_{2016})^4}{a_{2015} a_{2016}} + \frac{(a_{2016} + a_1)^4}{a_{2016} a_1} \geq 16.$$

4. a) Demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in (-1, +\infty)$ are loc inegalitatea $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
 b) Determinați $x \in \left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ pentru care

$$\frac{\lg(1 + 2x)}{2} + \frac{\lg(1 + 3x)}{3} + \frac{\lg(1 + 4x)}{4} + \frac{\lg(1 + 5x)}{5} = 4\lg(1 + x).$$



1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.
 - a) Demonstrați că matricea $X(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \neq -1$.
 - b) Calculați $X^{-1}(1) \cdot X^{-1}(2) \cdot \dots \cdot X^{-1}(2014)$.
2. a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty$.
 b) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \lambda \in (0, \infty)$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.
3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrice inversabile, $H = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ și $A_i \cdot A_j \in H$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
 - a) Să se arate că funcția $\varphi : H \rightarrow H$, $\varphi(X) = A_1 \cdot X$ este bijectivă.
 - b) Demonstrați că $(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 = n(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$.
4. Fie a, b, c trei numere strict pozitive și $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirurile definite prin $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ și $a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}$, $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $x_n = (a_n + b_n + c_n) \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este descrescător și are limita egală cu 9.

1. Fie a un număr real și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x, & \text{dacă } x < 0 \\ a\sqrt{x^2+1}, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$.
 - a) Arătați că f admite primitive dacă și numai dacă $a = 1$.
 - b) Pentru $a = 1$, să se determine o primitivă a funcției f .
 - c) Pentru $a = 1$, să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
2. Fie $G = (1, +\infty)$. Determinați numerele reale a, b, c pentru care perechea (G, \star) este grup, unde operația „ \star ” este definită prin $x \star y = xy + ax + by + c$, pentru orice $x, y \in G$.
3. Fie (G, \cdot) un grup finit cu $n \in \mathbb{N}^*$ elemente, unde n nu este multiplu de 4, în care există $a, b \in G \setminus \{e\}$, distincte, astfel încât $a^2 = b^2 = e$.
 - a) Arătați că (S_3, \cdot) are proprietatea din enunț.
 - b) Demonstrați că grupul (G, \cdot) nu este grup abelian.
4. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x^n \cos x dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un unic $b_n \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ astfel încât $x_n = \int_{b_n}^{\frac{3\pi}{4}} x^n \cos x dx$.
 - b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător și are limita $-\infty$.

