



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2016
Clasa a V-a

1. Comparați numerele x și y dacă:

$$x = 2^{1004} - 2^{1003} - 2^{1002} - 2^{1001} - 2^{1000} \text{ și } y = (3^{598} \cdot 111 + 3^{598} \cdot 222 + \dots + 3^{598} \cdot 999) : 555.$$

2. Determinați numerele \overline{ab} pentru care $10 \cdot (a + b)^2 = \overline{ab0}$.

3. Aflați deîmpărțitul, știind că între împărțitor, cât și rest există relația $i^2 + c^2 + r^2 = 37$.

4. La ora de matematică, fiecare dintre cei 25 de elevi ai clasei a V-a primește câte un cartonaș pe care este scris un număr natural nenul. Fiecare elev împarte numărul de pe cartonaș la 24 și comunică profesorului restul obținut la împărțire. Suma resturilor obținute este 288. Elevul Daniel constată că resturile obținute de colegii săi sunt diferite, iar câtul și restul obținute de el sunt egale.

- a) Ce număr este scris pe cartonașul lui Daniel?
- b) Aflați suma numerelor scrise pe cele 25 de cartonașe, știind că fiecare elev, în afara lui Daniel, a obținut câtul cu 1 mai mare decât restul.



1. Fie numerele raționale pozitive

$$A = \frac{12}{48} + \frac{102}{408} + \frac{1002}{4008} + \frac{10002}{40008} \text{ și } B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2015}{2016}.$$

Să se calculeze $B - A$, A^B și $(B - 2000)^{A+1}$.

2. Determinați numerele naturale a , b , c și d , știind că $a < b < c < d$, $(a, d) = (b, c)$, $[a, d] = [b, c]$ și $a \cdot b \cdot c \cdot d = 2916$. Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x și y , iar cu $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y .
3. În interiorul segmentului $AB = 160$ cm se consideră punctele C și D astfel încât $0,5 \cdot AC = 0,3 \cdot BC$ și $5 \cdot AD = 3 \cdot BD$.
- a) Calculați lungimea segmentelor AC și BD .
- b) Stabiliți ordinea punctelor A , B , C , D .
4. Dreptele AB și CD se intersectează în punctul O , astfel încât $m(\angle AOC) = \frac{7}{11} \cdot m(\angle BOC)$. Fie $OE \perp AB$ și OF bisectoarea unghiului BOD . Aflați măsura unghiului EOF .



1. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$. Arătați că:
 - a) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - b) Există numerele $a, b \in \mathbb{N}^*$, nedivizibile cu 5 și prime între ele, astfel ca $\sqrt{a^2 \cdot b^2 + c^2}$ să fie natural.
2. Fie numerele întregi impare $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ și numerele întregi pare $b_1, b_2, \dots, b_{2015}$. Arătați că:
 - a) Orice număr pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k + 1$, unde k este număr natural.
 - b) $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots + a_{2015}^2 + b_{2015}^2} \notin \mathbb{Q}$.
3. În triunghiul isoscel ABC , cu $[AB] \equiv [AC]$, se consideră bisectoarele (AD) , respectiv (CE) , cu $D \in BC$, $E \in AB$ și punctul F mijlocul lui $[AC]$, astfel încât $EF \perp AC$, $FD \parallel AB$.
 - a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .
 - b) Arătați că triunghiul ABP este isoscel, unde $AD \cap EF = \{P\}$.
4. Romburile $ABCD$ și $DEFG$ au un singur punct comun, $[AB] \equiv [DE]$, $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DEF) \neq 90^\circ$, iar punctele B, D și F sunt coliniare. Arătați că:
 - a) $m(\sphericalangle ADG) = 90^\circ$.
 - b) Mijlocul segmentului $[BF]$ este punctul L , unde $\{L\} = AE \cap CG$.



1. Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât MB , BD și MD sunt direct proporționale cu $\sqrt{34}$, 5 și respectiv $\sqrt{41}$, iar $MC = 15\sqrt{2}$ cm. Calculați dimensiunile dreptunghiului și lungimea segmentului MA .
2. Fie M , N , P , Q patru puncte necoplanare pentru care $MP = MQ = NP = NQ$. Notăm cu S mijlocul segmentului MN .
 - a) Demonstrați că $MN \perp (SQP)$.
 - b) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele MN și PQ .
3.
 - a) Arătați că $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = x^5 + x^4 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine numerele reale x și y , $x < y$, pentru care intervalul (x, y) conține cel puțin două numere întregi și $x^2 + y^2 + x - 5y + 9 = |x - y + 1|$.
4.
 - a) Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $5k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$.
 - b) Arătați că numărul $\sqrt{2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^n + 17}$ este irațional, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.