

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**  
**Clasa a IX-a**



**profil științe ale naturii, tehnologic, servicii**

1. Se consideră predicatul binar  $p(x, y) : 4x + 3y = 2016, x, y \in \mathbb{N}$  și mulțimea  
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 4x + 3y = 2016\}.$

- a) Determinați numărul elementelor mulțimii  $A$ .  
b) Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:  $p_1 : (\exists x)(\exists y) p(x, y), x, y \in \mathbb{N};$   
 $p_2 : (\forall x)(\exists y) p(x, y), x, y \in \mathbb{N}$  și  $p_3 : (\forall x)(\forall y) p(x, y), x, y \in \mathbb{N}.$

2. a) Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$  astfel încât  $a + b + c = 1992$ . Demonstrați că:

$$\sqrt{2a + 14} + \sqrt{2b + 15} + \sqrt{2c + 16} \leq 2016.$$

- b) Să se demonstreze că, dacă  $x_i \in (1, +\infty), i = \overline{1, n}$ , atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot \dots \cdot (x_n + 1)}{1 + x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Demonstrați că punctele  $A, B, C$  sunt coliniare dacă și numai dacă există numerele  $a, b, c$  nu toate nule, astfel încât  $a + b + c = 0$  și  $a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ , unde  $P$  este un punct oarecare în plan.
4. a) Fie triunghiul  $ABC$  și punctul  $M$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$ . Determinați numerele reale  $a, b$  pentru care  $\overrightarrow{CM} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$ .  
b) Fie punctele  $M, N, P$  pe laturile  $[AB], [BC], [AC]$  ale triunghiului  $ABC$  astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k.$$

Demonstrați că triunghiurile  $ABC$  și  $MNP$  au același centru de greutate.

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**

**Clasa a IX-a**  
**profil uman**



1. Se consideră predicatul binar  $p(x, y) : 4x + 3y = 2016$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$  și mulțimea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 4x + 3y = 2016\}.$$

- a) Determinați numărul elementelor mulțimii  $A$ .
- b) Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:  $p_1 : (\exists x)(\exists y)p(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$ ;  
 $p_2 : (\forall x)(\exists y)p(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$  și  $p_3 : (\forall x)(\forall y)p(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$ .
2. a) Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$  astfel încât  $a + b + c = 1992$ . Demonstrați că:

$$\sqrt{2a + 14} + \sqrt{2b + 15} + \sqrt{2c + 16} \leq 2016.$$

- b) Să se demonstreze că, dacă  $x_i \in (1, +\infty)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot \dots \cdot (x_n + 1)}{1 + x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Fie triunghiul  $ABC$  în care punctele  $M$ ,  $N$ , respectiv  $P$  sunt mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ , respectiv  $[AC]$  și punctul  $H$  ortocentrul triunghiului  $MNP$ . Arătați că  $HA = HB = HC$ .
4. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 1)$  și  $C(4, -1)$ . Să se determine:
- a) Coordonatele punctului  $D \in Ox$  astfel încât vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  să fie coliniari.
- b) Coordonatele punctului  $E$  pentru care vectorii  $\overrightarrow{BE}$  și  $\overrightarrow{AC}$  sunt coliniari și mijlocul segmentului  $[BE]$  este situat pe axa  $Oy$ .

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**

**Clasa a X-a**

**profil științe ale naturii, tehnologic, servicii**



1. a) Arătați că  $\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .  
b) Calculați suma  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$  și arătați că  $S_n < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
2. a) Fie  $a, b, c \in (0, +\infty)$ . Demonstrați că, dacă  $\frac{\lg a + \lg b}{2} = \lg \frac{a+b}{\sqrt{13}}$ , atunci  $a^2 + b^2 = 11ab$ .  
b) Fie  $a, b, c \in (0, 1)$ . Demonstrați că:  
$$\log_a \frac{3abc}{ab+ac+bc} + \log_b \frac{3abc}{ab+ac+bc} + \log_c \frac{3abc}{ab+ac+bc} \geq 3.$$
3. a) Calculați  $\frac{z^5}{27} - \frac{27}{z}$  știind că  $z$  este soluție a ecuației  $z^2 + 3z + 9 = 0$ .  
b) Demonstrați că, dacă  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  astfel încât  $\frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1} \in \mathbb{R}$ , atunci  $|z| = 1$ .
4. Cantitatea de medicament, în miligrame, din circuitul sanguin al unui pacient după  $t$  minute de la momentul administrării acestuia este dată de valorile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = 200 \cdot e^{-0,014t}$ , unde  $e$  este numărul lui Euler. Arătați că, după 16 ore și 40 de minute, cantitatea de medicament din sângele pacientului este mai mică decât  $2^{-6}$  mg.

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**

**Clasa a X-a**

**profil uman**



1. a) Să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 2016$ .

b) Arătați că  $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \in \mathbb{Z}$ .

2. a) Fie  $a, b, c \in (0, +\infty)$ . Demonstrați că, dacă  $\frac{\lg a + \lg b}{2} = \lg \frac{a+b}{\sqrt{13}}$ , atunci  $a^2 + b^2 = 11ab$ .

b) Demonstrați că expresia

$$E = \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \cdots + \log_2 x} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \cdots + \log_3 x} + \cdots + \frac{1}{\log_x 1 + \log_x 2 + \cdots + \log_x x}$$

este independentă de numărul natural  $x \geq 2$ .

3. a) Calculați  $\frac{z^5}{27} - \frac{27}{z}$  știind că  $z$  este soluție a ecuației  $z^2 + 3z + 9 = 0$ .

b) Simplificați în mulțimea numerelor complexe expresia  $E(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 4ix - 3}$ .

4. Cantitatea de medicament, în miligrame, din circuitul sanguin al unui pacient după  $t$  minute de la momentul administrării acestuia este dată de valorile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = 200 \cdot e^{-0,014t}$ , unde  $e$  este numărul lui Euler. Arătați că, după 16 ore și 40 de minute, cantitatea de medicament din sângele pacientului este mai mică decât  $2^{-6}$  mg.

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**  
**Clasa a XI-a**  
**profil științe ale naturii, tehnologic, servicii**

1. Se consideră punctele  $A_n(1 + n, n^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a) Arătați că pentru orice  $p, q, r \in \mathbb{N}^*$  distincte două câte două, punctele  $A_p, A_q, A_r$  nu sunt coliniare.
  - b) Demonstrați că aria triunghiului  $A_n A_{n+1} A_{n+2}$  este constantă.
2. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - a) Calculați  $(A - A^T)^{2016}$ .
  - b) Rezolvați ecuația  $X^3 = A$ ,  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Calculați limitele:
  - a)  $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(1 - x^2)}{x^2 - 5x + 6}$ ;
  - b)  $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2^3 x \rfloor + \lfloor 3^3 x \rfloor + \dots + \lfloor n^3 x \rfloor}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4.
  - a) Demonstrați că ecuația  $x + 1 + \cos x = 0$  are cel puțin o soluție în intervalul  $I = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .
  - b) Se consideră funcțiile continue  $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  astfel încât  $g(a) = a$  și  $g(b) = b$ . Demonstrați că ecuația  $f(x) = g(x)$  are cel puțin o soluție reală.



**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**

**Clasa a XI-a**  
**profil uman**



1. În tabelul următor sunt grupate datele privind mediile de admitere în clasa a IX-a:

<b>Media</b>	5,00 - 5,99	6,00 - 6,99	7,00 - 7,99	8,00 - 8,99	9,00 - 9,99	10
<b>Nr. elevi</b>	11	35	38	41	31	2

- a) Precizați efectivul populației statistice, caracteristica și tipul ei.
- b) Completați tabelul seriei statistice cu frecvențele relative și frecvențele relative cumulate.
- c) Precizați numărul elevilor cu medii mai mici decât 7 și numărul elevilor cu medii mai mari decât 8. Exprimați aceste rezultate în procente.
2. În urma unui sondaj efectuat pe un eșantion de 500 de persoane asupra timpului petrecut pe o rețea de socializare s-au consemnat următoarele date:

<b>Timp (minute)</b>	0 - 30	30 - 60	60 - 90	90 - 120	120 - 180	peste 180
<b>Nr. persoane</b>	45	70	90	180	70	45

- a) Completați tabelul seriei statistice cu frecvențele relative și frecvențele relative cumulate
- b) Care este timpul mediu petrecut pe rețea de persoană?
- c) Să se determine mediana.
3. Temperatura aerului, măsurată în grade Celsius, într-o zi de vară este consemnată în tabelul următor:

<b>Ora</b>	1	4	8	10	14	16	19	20	22
<b>Temperatura</b>	20	15	18	24	28	30	27	25	20

- a) Reprezentați histograma și diagrama prin benzi.
- b) Determinați modulul seriei statistice, mediana, media aritmetică, valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică a valorilor caracteristice.
4. S-au amestecat 3 kg de cafea cu prețul 24 lei/kg cu 5 kg de cafea cu prețul 18 lei/kg și cu 8 kg de cafea cu prețul de 21 lei/kg. Care va fi prețul mediu de vânzare al unui kilogram de amestec?

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**  
**Clasa a XII-a**  
**profil științe ale naturii, tehnologic, servicii**



1. Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- a) Arătați că  $(G, \circ)$  este grup abelian.
  - b) Determinați  $m, n \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow G$ ,  $f(x) = \sqrt{mx + n}$  să fie izomorfism de la grupul  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  la grupul  $(G, \circ)$ .
  - c) Să se determine  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}}$ .
2. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ .
- a) Demonstrați că  $G$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.
  - b) Determinați  $t \in \mathbb{R}$  astfel încât  $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2016) = X(t-1)$ .
3. Calculați primitiva  $\int \frac{1}{x \left( 1 + x \sqrt{x \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x \dots \sqrt[n]{x}}}} \right)} dx$ ,  $x \in (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
4. a) Calculați  $\int_1^e \frac{1}{x \sqrt{4 - \ln^2 x}} dx$ .
- b) Demonstrați că:  $\frac{2}{(\sqrt{3})^n + 1} \leq \frac{24}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”, 2016**  
**ETAPA LOCALĂ, HUNEDOARA**  
**Clasa a XII-a**  
**profil uman**



1. Fie mulțimea  $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ -2a & 1 & -2a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$

a) Să se arate că  $A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) \in G, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

b) Să se calculeze  $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2016).$

2. a) Determinați  $a, b \in \mathbb{C}$  pentru care  $A^3 = aA^2 + bA$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$  Arătați că  $(AB)^T = BA.$

c) Determinați  $a, b \in \mathbb{C}$  astfel încât:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 + a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + bI_2 = O_2.$$

3. Se consideră determinanții:  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix},$  unde  $a, b, c$  sunt numere reale, diferite două câte două.

Calculați, scriind sub forma cea mai simplă,  $\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}.$

4. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0,$  unde  $a, b$  și  $c$  sunt numere reale.

b) Verificați egalitatea  $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = -2(a^3 + b^3).$