



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța 21.02.2016

Clasa a XII-a

Filiera tehnologică: Profilul Tehnic – toate specializările,
Profilul Servicii: – specializarea Resurse Naturale și Protecția Mediului

SUBIECTUL 1

Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 7^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A(x) / x \in \mathbb{R}\}$.

- Verificați faptul că $I_3 \in G$.
- Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că $(G; \cdot)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL 2

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + mxy$, $m \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $[-1; +\infty)$ este partea stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea $*$.

- Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.
- Pentru $m = 1$ rezolvați ecuația $x * x * x = 0$.
- Dacă $m = 1$ arătați că $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x+1)^n - 1$.

SUBIECTUL 3

Fie $f: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$

și $F: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = a \cdot \ln(x+1) + b \cdot \ln(x^2+1) + c \cdot \arctg x$.

- Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât F să fie primitivă a lui f .
- Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- Studiați monotonia funcției F .

SUBIECTUL 4

Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculați I_2 și I_3 .
- Demonstrați că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \cdot I_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu