



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța 21.02.2016

Clasa a XII-a

Filiera teoretică: Profilul Real – specializarea științele naturii

SUBIECTUL 1

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

- Arătați că $G = (2; +\infty)$ este parte stabilă a lui R în raport cu legea dată.
- Știind că pe mulțimea $G' = (3; +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, arătați că $(G'; \circ)$ este grup.
- Știind că $(G; *)$ este grup, arătați că între grupul G și G' există un izomorfism de forma $f : (2; +\infty) \rightarrow (3; +\infty)$.

SUBIECTUL 2

- Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

Notăm $X^{[k]} = x \circ x \circ \dots \circ x$, unde x apare de k ori. Calculați suma $S = \sum_{k=1}^{2016} 5^{[k]}$.

- Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$. Se definește mulțimea $G = \left\{ A(x) / x \in R \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$.

Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy)$ pentru orice $x, y \in R \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

SUBIECTUL 3

Se dau funcțiile: $f, g: R \rightarrow R, f(x) = x$ și $g(x) = x \cdot e^{2-x}$

- Să se demonstreze că funcția $h: [0, 4] \rightarrow R, h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ admite primitive și să se găsească o primitivă a funcției h al cărei grafic trece prin punctul de coordonate $(3; 4 - \frac{4}{e})$.
- Să se calculeze: $I = \int \frac{(x^3 - 3x^2)e^x}{(x^3 - e^x)^2} dx$, pe un interval pe care $x^3 > e^x$.

SUBIECTUL 4

- Să se demonstreze că : $\frac{x+9}{5(x^2-9)} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right), x \in R - \{\pm 3\}$.

- Să se calculeze integrala $J = \int \frac{10x^2 + x - 81}{5(x^2 - 9)} dx, x \in (5; \infty)$.

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.