



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța 21.02.2016

Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Cu schimbarea de variabilă $t = e^x$ obținem $\int e^x f(x) dx = \arctg(e^x) + C$ 2p

b) Cu schimbarea de variabilă $t = e^x$ și $\int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^x}{e^{3x} + e^x} dx$, calculăm

$\int \frac{dt}{t^3 + t} = \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C$, revenind în substituție avem $\int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \ln(e^x) - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$, cum

$F(0) = 1$ avem $c = 1 + \ln \sqrt{2}$ 3p. Am folosit că $\frac{1}{t^3 + t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}$.

c) Avem succesiv $\int \left(\frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{e^{-2x} + 1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) dx = \int 1 dx = x + C$ 2p

SUBIECTUL 2

Dacă alegem $y = e \Rightarrow x * e = (x \circ x) \circ (x \circ e), x = (x \circ x) \circ x, \forall x \in G$ 2p

deci $x \circ x = e, \forall x \in G$ 2p

Obținem că $x * y = e \circ (x \circ y) = x \circ y, \forall x, y \in G$, deci legile coincid1p

Cum grupul are proprietatea $x \circ x = e, \forall x \in G$ rezultă comutativitatea.2p

SUBIECTUL 3

a) Pentru $x = e$, element neutru avem $f(f(y)) = y \cdot f(e), \forall y \in G$, dar $g : G \rightarrow G, g(y) = y \cdot a$ este bijectivă pentru a din G, avem că $f \circ f$ este bijectivă și obținem și f bijectivă.....2p

Pentru $y = e \Rightarrow f(f(e)) = f(e) \Rightarrow (inj) f(e) = e \Rightarrow f(f(y)) = y, \forall y \in G \Rightarrow f \circ f = 1_G$ 2p

Dacă în ipoteză $y \rightarrow f(y) \Rightarrow f(x \cdot f(f(y))) = f(y) \cdot f(x) \Rightarrow f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x), \forall x, y \in G$ 2p

b) exemplu $f : G \rightarrow G, f(x) = x^{-1}$ verifică.1p

SUBIECTUL 4

Scriem $I = \int_1^n [\log_2 x] dx = \int_1^2 [\log_2 x] dx + \int_2^{2^2} [\log_2 x] dx + \dots + \int_{2^{k-1}}^{2^k} [\log_2 x] dx + \int_{2^k}^n [\log_2 x] dx$, unde $k \in N$ și

$2^k \leq n < 2^{k+1}, k = [\log_2 n]$ 3p.

Obținem că $I = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + (k-1) \cdot 2^{k-1} + k \cdot (n - 2^k)$ 2p,

$I = n[\log_2 n] - 2^{[\log_2 n]+1} + 2$, folosind eventual

$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = (x + x^2 + \dots + x^n)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$ 2p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .