



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Etapa locală – Constanța 21.02.2016

**Clasa a X-a**

**Barem de corectare și notare**

**SUBIECTUL 1**

$$\left(\sqrt{(b+c)\log_3 a} + \sqrt{(a+c)\log_3 b} + \sqrt{(b+a)\log_3 c}\right)^2 \leq (2a+2b+2c)\log_3(abc) = 18 \cdot 3\log_3 \sqrt[3]{abc} \dots 3p$$

$$\leq 18 \cdot 3\log_3 \frac{a+b+c}{3} = 54 \dots 3p, \text{ de unde concluzia } \dots 1p$$

**SUBIECTUL 2**

Cum  $|x-1| \leq \frac{1}{5}$  sau  $x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right]$  obținem că toate parantezele sunt pozitive  $\dots 2p$

și aplicăm inegalitatea mediilor

$$\sqrt[3]{(6-5x)(4x-3) \cdot 1} + \sqrt[3]{(5x-4)(5-4x) \cdot 1} \leq \frac{6-5x+4x-3+1}{3} + \frac{5x-4+5-4x+1}{3} = 2 \dots 3p$$

cu egalitate când toate parantezele sunt egale cu 1, obținem  $x=1$  soluție unică  $\dots 2p$

**SUBIECTUL 3**

Domeniul este  $[1; \infty)$ . Avem  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = \frac{4}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} \leq 2$ , deoarece

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} \geq 2, \forall x \geq 1 \text{ ca funcție strict crescătoare } \dots 3p$$

$$\log_3\left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq 1 \Leftrightarrow x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \leq 3 \dots 1p$$

$$\text{Notez } \sqrt[3]{x} = u, u \geq 1 \Rightarrow u^4 - 3u + 2 \leq 0 \Rightarrow (u-1)(u^3 + u^2 + u - 2) \leq 0 \dots 2p$$

$$\text{dar } u^3 + u^2 + u - 2 \geq 1 \text{ și deci } (u-1) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 1 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ soluție unică } \dots 1p$$

**SUBIECTUL 4**

Fie  $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ , obținem  $a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i + a + bi + 1 = 0$  și avem

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 + a + 1 = 0(*) \\ 3a^2b - b^3 + b = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - b^2 + 1 = 0 \end{cases} \dots 2p \Rightarrow 3a^2 = b^2 - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 + 4a^2 > 1,$$

(dacă  $a = 0$  din  $(*)$  obținem  $1=0$  fals  $\dots 2p$ . Deci  $|z| > 1$ , din ecuația inițială obținem

succesiv  $|z|^3 = |z+1| \leq |z| + 1$  sau  $|z|(|z|^2 - 1) \leq 1$ . dar  $|z| > 1$  și  $(|z|^2 - 1) > 0$  implică  $(|z|^2 - 1) < 1$ , deci

$$|z| < \sqrt{2} \text{ de unde concluzia } |z| \in (1, \sqrt{2}) \dots 3p$$

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .