

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etape locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| = |b - a|$1p

Relația $|a| + |b| \geq |a - b|$ este simetrică în a și b , atunci este suficient doar cazul $a \geq b \geq 0$ 1p

În acest caz, $a + b \geq a - b \Leftrightarrow |a| + |b| \geq |a - b|$ (*)1p

b) Gruparea termenilor egal depărtați de capete permite aplicarea relației (*).1p

Suma a câte 2 termeni este $|x + 2017 - k| + |x + k| \geq 2017 - 2k, \forall k, k \in \{1, 2, 3, \dots, 1008\}$ 1p

Calculul sumei $1 + 2 + \dots + 1008 = \frac{1008 \cdot 1009}{2}$ 1p

Finalizare, $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 2016| \geq 1008^2$ 1p

SUBIECTUL 2

a) Calculul numărului $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2016}} \Rightarrow$

$$a = \sqrt{3} + 3 + \dots + 3^{1007} \sqrt{3} + 3^{1008} = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})(1 + 3 + \dots + 3^{1007}) \quad \dots\dots\dots 2p$$

b) Calculul $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016} = 3 \cdot (1 + 3^{1008}) \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1007}) \quad \dots\dots\dots 2p$

$$c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} - 1 = 3^{1008} \quad \dots\dots\dots 2p; \quad \text{Finalizare, } c = (3^{504})^2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 3

a) Se demonstrează $\triangle MNB \equiv \triangle FNB \Rightarrow [MB] \equiv [FB]$ și cum

$m(\angle ABC) = 30^\circ$, atunci $[MB] \equiv [FB] \equiv [MF]$1p

În $\triangle ABF$, $[AM] \equiv [BM] \equiv [FM] \Rightarrow m(\angle AFB) = 90^\circ$ și

$m(\angle BAF) = 30^\circ$1p

În $\triangle ABP$, $m(\angle ABP) = m(\angle BAP) = 30^\circ$ și cum

$[AM] \equiv [BM] \Rightarrow MP \perp AB$ (1)1p

În $\triangle ABE$, $[AE] \equiv [BE]$ și $[AM] \equiv [BM] \Rightarrow EM \perp AB$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $E \in MP$1p

b) Cum $m(\angle BAP) = 30^\circ$ și $m(\angle PMA) = 90^\circ$ și

$MP = a$ (cm), atunci $AP = 2a$ și apoi $AF = 3a$1p

Se demonstrează în $\triangle ACP$, $PC = 4a$ și în $\triangle CDP$, $CP = DP = 4a$ 1p

Se arată că $AF = DM = 3a$, adică $[AF] \equiv [DM]$ 1p

SUBIECTUL 4

Dacă $ALEP$ și $BLIT$ sunt pătrate, unde $L \in (AB)$ și $AL < BL$, atunci $E \in (LI)$ și

cum $ABCD$ este pătrat, atunci $DP \parallel BT$, $[DP] \equiv [BT]$. (I).1p

Din (1) rezultă $DPBT$ paralelogram și cum $M \in (PT)$, $[PM] \equiv [MT]$. atunci

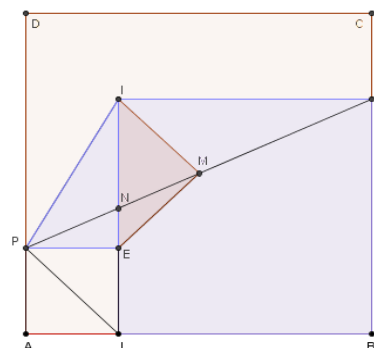
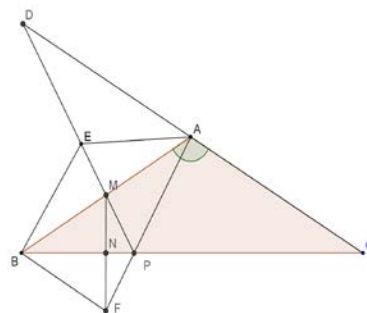
$M \in (BD)$, $[DM] \equiv [MB]$1p

În $ABCD$ și $BLIT$ pătrate, cu $L \in (AB)$, și $T \in (BC)$. rezultă

$m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = m(\angle IBL) = m(\angle LBT) = 45^\circ \Rightarrow BD = BI$ și cum $M \in (BD)$, $[DM] \equiv [MB] \Rightarrow I \in (BD)$. (2).

Din (2), cu ipoteza $M \in (BD)$, $[DM] \equiv [MB]$ și deoarece $G \in (IM)$, $\frac{GM}{GI} = \frac{1}{2} \Rightarrow I, G \in (BD)$1p

Demonstrează $M \in (AC)$, $[AM] \equiv [MC]$ și cum $M \in (BD)$, $[DM] \equiv [MB] \Rightarrow E, M \in (AC)$, deci $ME = AC$. (3)1p



Notăm lungimile $AL = a$ și $LB = b$. Din $ABCD$ pătrat , cum $AD \parallel LI \parallel BC$, $IM = BD$ și $ME = AC$, demonstrăm că, oricare ar fi poziția punctului $L \in (AB)$, $\triangle MIE$ este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $IE = b - a$ și $\triangle PIE$ este dreptunghic cu catetele $EP = a$ și $IE = b - a$1p

Ipoteza $A_{PIE} = A_{MEI} \Leftrightarrow d(M, IL) = a \Rightarrow d(M, AD) = 2a \Rightarrow a + b = 4a \Rightarrow b = 3a$ 1p

In final, valoarea raportului dintre ariile pătratelor $ALEP$ și $ABCD$ este egală cu $\frac{1}{16}$.

$G \in IM, \frac{IG}{IM} = \frac{2}{3}, \frac{IM}{BD} = \frac{1}{4}, [BD] \equiv [AC] \Rightarrow \frac{IG}{AC} = \frac{1}{6}$ 1p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .