



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța 21.02.2016

Clasa a X-a

Filiera teoretică: Profilul Real – specializarea științele naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Notăm $2^x = a$ cu $a > 0$, $3^x = b$ cu $b > 0$ și $4^x = c$ cu $c > 0$. Ecuația devine $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ 1p

Folosind relația din enunț obținem că $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0$.

Cum $a+b+c > 0$, avem că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$, adică $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$.

Rezultă că $a = b = c$, $2^x = 3^x = 4^x$, de unde aflăm $x = 0$ 2p

b) $4^x - 7 > 0 \Rightarrow x \in (\log_4 7, +\infty)$ 1p; $\log_4(3^x + 7) = \log_3(4^x - 7) = k \Rightarrow 3^x + 7 = 4^k$ și $4^x - 7 = 3^k$ 1p

Adunând cele două relații obținem că $3^x + 4^x = 3^k + 4^k$. Dacă $x > k \Rightarrow 3^x + 4^x > 3^k + 4^k$, fals. Dacă

$x < k \Rightarrow 3^x + 4^x < 3^k + 4^k$, fals. Rezultă că $x = k$, $3^x + 7 = 4^x$1p. Împărțind la 4^x obținem

$\left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{7}{4^x} = 1$, cu soluția unică $x = 2 \in (\log_4 7, +\infty)$ (sumă de două funcții descrescătoare)1p

SUBIECTUL 2

a) Din $(z + |z|)^2 = (1 + 2i)^2$ obținem că $z + |z| = \pm(1 + 2i)$ 1p

Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = \pm(1 + 2i)$. Dacă $a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 1 + 2i$, obținem

$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ și $b = 2$, de unde $a = -\frac{3}{2}$ și $z = -\frac{3}{2} + 2i$ 2p. Dacă $a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = -1 - 2i$,

obținem $a + \sqrt{a^2 + b^2} = -1$ și $b = -2$. Din $\sqrt{a^2 + b^2} = -1 - a$, $a \in (-\infty, -1] \Rightarrow a = \frac{3}{2}$, fals.1p

b) $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = \overline{\left(\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\right)}$ 1p; $\Rightarrow \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = \frac{1+\bar{z}+\bar{z}^2}{1-\bar{z}+\bar{z}^2}$, de unde obținem că

$(z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0$1p. $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbf{R}$, fals. Dacă $z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z| = 1$ 1p

SUBIECTUL 3

$a(2\lg a - \lg b - \lg c) + b(2\lg b - \lg a - \lg c) + c(2\lg c - \lg a - \lg b) = 0$ 1p

$(b-a)(\lg b - \lg a) + (c-b)(\lg c - \lg b) + (c-a)(\lg c - \lg a) = 0$ 2p

Presupunem că $a \leq b < c$ (în celelalte cazuri procedăm analog), atunci și $\lg a \leq \lg b < \lg c$, de unde rezultă că

$(b-a)(\lg b - \lg a) \geq 0$, $(c-b)(\lg c - \lg b) > 0$ și $(c-a)(\lg c - \lg a) > 0$ 3p

Egalitatea este adevărată pentru $a = b = c \Rightarrow$ triunghiul este echilateral.....1p

SUBIECTUL 4

Funcția f este bijectivă dacă pentru $y \in \mathbf{R}$ există un unic $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = y$ 1p

Din $f(x) = y \Rightarrow 2x + \sqrt{x^2 + 1} = y \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y - 2x$, $y - 2x \geq 0$. Prin ridicare la pătrat obținem ecuația

$3x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ 1p. $\Delta = 4y^2 + 12 > 0$ și $x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{y^2 + 3}}{3}$1p

Dacă $x_1 = \frac{2y + \sqrt{y^2 + 3}}{3}$, din $y - 2x_1 \geq 0$, obținem că $2\sqrt{y^2 + 3} \leq -y$. Dacă $y > 0$, fals. Dacă $y \leq 0$, ridicăm la

pătrat și avem $3y^2 + 12 \leq 0$, fals.1p. Dacă $x_2 = \frac{2y - \sqrt{y^2 + 3}}{3}$, din $y - 2x_1 \geq 0$, obținem că

$2\sqrt{y^2 + 3} \geq y$. Dacă $y \leq 0$ relația este adevărată. Dacă $y > 0$ și ridicăm la pătrat, avem $3y^2 + 12 \geq 0$, adevărat.

Rezultă că funcția este bijectivă. 1p. Observăm că $g(x) = (f \circ f)(x)$. Cum f este bijectivă, rezultă că g este bijectivă ca rezultat al compunerii a două funcții bijective.2p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .