



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a IX-a

filiera teoretică: profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) $x = \frac{7-2m}{7}$ 4p

b) $[x] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{7-2m}{7} < 2 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{7}{2}, 0\right]$ 2p

Dar $m \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow m \in \{-3, -2, -1\}$ 1p

SUBIECTUL 2

a) Inducție matematică. Etapa I: $a_1 = 0$ se verifică 1p

Etapa II: Presupunem $P(k): a_k = k(k-1)$ și demonstrăm $P(k+1): a_{k+1} = (k+1)k$ 1p

$a_{k+1} = a_k + \sqrt{4a_k + 1} + 1 = k(k-1) + \sqrt{4k^2 - 4k + 1} + 1 = k^2 - k + \sqrt{(2k-1)^2} + 1 = (k+1)k$ 1p

Din cele două etape $\Rightarrow a_n = n(n-1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

b) $\sum_{k=1}^n \sqrt{4a_k + 1} = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ 3p

SUBIECTUL 3

a) $x(1+2+3+\dots+x) = 40 \Leftrightarrow x \frac{x(x+1)}{2} = 40 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 80$ 2p

x^2 divizor pătrat perfect al lui 80 $\Rightarrow x = 4$ soluție unică 2p

b) $b_1 \frac{q^{2016} - 1}{q - 1} = 2$ (1) 1p

$\frac{1}{b_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{2016} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b_1} \cdot \frac{1}{q^{2015}} \cdot \frac{q^{2016} - 1}{q - 1} = 1$ și folosind (1) $\Rightarrow b_1^2 q^{2015} = 2$ 1p

Obținem $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{2016} = b_1^{2016} q^{1+2+\dots+2015} = b_1^{2016} q^{2015 \cdot 1008} = (b_1^2 q^{2015})^{1008} = 2^{1008}$ 1p

SUBIECTUL 4

a) Notăm $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. În $\triangle MEF$, $[MR]$ este mediană, deci $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \Rightarrow$ 1p

$\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{3}{10}\vec{u}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{u}\right) + \frac{4}{5}\vec{v} \right] \Rightarrow$ 2p

$\overrightarrow{MR} = \frac{2}{5}(\vec{v} - \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MR} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ 1p

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) \Rightarrow$ 1p

$\overrightarrow{MR} = \frac{2}{5}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MR}$ și \overrightarrow{MN} coliniari $\Rightarrow M, R, N$ sunt coliniare. 2p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .