MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a 11-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1. Matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ are proprietatea $\det(A^2 + I_2) = 0$. Demonstraţi că $A^2 = -I_2$.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	**1p**
$\det(A^2 + I_2) = \det\left((A + \mathrm{i}I_2)(A - \mathrm{i}I_2)\right) = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$, unde $\det(A + \mathrm{i}I_2) = x + \mathrm{i}y$	**2p**
Avem $x = ad - bc - 1 = 0$ şi $y = a + d = 0$	**2p**
Din $\det(A) = 1$ şi $a + d = 0$ rezultă $A^2 = (a + d)A - \det(A)I_2 = -I_2$	**2p**

Subiect 2. Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ şi A^* matricea ei adjunctă.

a) Demonstraţi că $\det(A^*) = \left(\det(A)\right)^2$.

b) Determinaţi A, dacă $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Prof.Aurel Doboşan, Supliment GM 11/2015

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $AA^* = \det(A)I_3$ implică $\det(A)\det(A^*) = \left(\det(A)\right)^3$, deci $\det(A^*) = \left(\det(A)\right)^2$ în cazul $\det(A) \neq 0$	**2p**
Dacă $\det(A) = 0$ atunci $\det(A^*) = 0$, deoarece în caz contrar A^* ar fi inversabilă şi egalitatea $AA^* = O_3$ ar implica $A = O_3$, în contradicţie cu $\det(A^*) = 0$	**1p**
b) $\det(A^*) = 324 \Rightarrow \det(A) = \pm 18$	**1p**
$A = \pm 18 I_3 (A^*)^{-1}$	**1p**
$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**

Subiect 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive şi $(y_n)_{n\geq 1}$ şirul dat de

$$y_n = \frac{x_n}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n)}, \forall n \geq 1.$$

Demonstraţi că:

a) dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător;

b) dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Prof.Traian Preda

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $y_{n+1} / y_n = (x_{n+1} / x_n) \cdot 1/(1+x_{n+1}) < 1$	**3p**
b) Şirul dat de $z_n = 1/\left((1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\right)$ este descrescător şi mărginit, deci convergent	**2p**
Rezultă că $y_n = z_n x_n$ este convergent	**2p**

Subiect 4. Fie $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ o funcţie cu proprietatea $f(x+1)-f(x)>1, \forall x\geq 0$.

a) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(f(x)+e^{f(x)}\right)-\sqrt{f^2(x)+4f(x)}\right)$.

Prof.Eugen Radu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $f(x) > 1 + f(x-1) > \ldots > [x] + f(\{x\}) \geq [x]$	**2p**
Din $\lim\limits_{x\to+\infty}[x] = +\infty$ rezultă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	**1p**
b) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\ln(y+e^y)-y\right) = \lim\limits_{y\to\infty}\left(\ln e^y(y/e^y+1)-y\right) = \lim\limits_{y\to\infty}\ln(y/e^y+1) = 0$	**2p**
$\lim\limits_{y\to\infty}\left(y-\sqrt{y^2+4y}\right) = -2$, deci limita cerută este -2.	**2p**