OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a XII-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecaresubiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1. Fie g : $(1,\infty) \to \mathbf{R}$, g(x) $= e^x + \cos x$

a) Să se calculeze g'(x), g''(x).

b) Să se determine o primitivă a funcției

f : $(1,\infty) \to \mathbf{R}$, f(x) $= \dfrac{1-2\cdot e^x \sin x}{e^{2x} + (\cos x - \sin x)\cdot e^x + \sin x \cos x}$.

***.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$g'(x) = e^x - \sin x$, $g''(x) = e^x - \cos x$	2p
Numitorul fracției $f(x)$ este $g(x)\cdot g'(x)$	1p
Numărătorul fracției $f(x)$ este $(g'(x))^2 - g(x)\cdot g''(x)$	1p
$f(x) = \dfrac{(g'(x))^2 - g(x)\cdot g''(x)}{g(x)\cdot g'(x)} = \dfrac{g'(x)}{g(x)} - \dfrac{g''(x)}{g'(x)} = (\ln(g(x)) - \ln(g'(x)))'$	2p
F : $(1,\infty) \to \mathbf{R}$, F(x) $= \ln\left(\dfrac{g(x)}{g'(x)}\right) + C = \ln\left(\dfrac{e^x + \cos x}{e^x - \sin x}\right) + C$	1p

Subiect 2 Să se determine funcțiile continue f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu proprietatea că există o primitivă F : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, a sa astfel încât $F(x + y) = f(x)f(y)$, oricare ar fi $x,y \in \mathbf{R}$.

Prof. Ion Nedelcu, Ploiești, GM nr 2, 2015, problema 27038.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă există y astfel încât $f(y) = 0$, atunci $F(x+y) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci $F(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, de unde $f(x) = 0$, adică f este funcția identic nulă. Dacă f nu e funcția identic nulă, obținem că $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.	1p
$y = 0 \Rightarrow$ $F(x) = f(x)f(0)$, deci f este o funcție derivabilă. Avem $f(x) = f(0)\, f'(x)$, sau $f'(x) - 1/f(0)f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Fie $a = -1/f(0) \neq 0$. Deci $f'(x) + af(x) = 0$	2p
Prin înmulțire cu e^{ax}, avem $(e^{ax}f(x))' = 0$, deci $e^{ax}f(x) = c$ (constant), deci $f(x) = ce^{-ax}$, $c \neq 0$.	2p
$f(0) = c$. Dar $f(0) = -1/a$, deci $c = -1/a$.	
Fie $\alpha = 1/c$. $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, $\alpha \neq 0$, și $F(x) = \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x}$.	2p

Subiect 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n \geq 3$, $n \in$ **N**. Notăm cu p(G) numărul perechilor ordonate (a,b), cu a, b $\in$ G şi ab = ba

a) Să se determine p(G) pentru G = Z_3 , respectiv G = S_3.

b) Să se arate că $p(G) \geq 3n$.

prof. Marian Andronache

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Z_3 este un grup abelian,deci orice pereche ordonată (a,b), cu a, b $\in$ G verifică ab = ba,deci p(G) = 3^2 = 9.	1p
Prin calcul direct, p(S_3) = 18	2p
b) Perechile (e,e), (e,x), (x,e), (x,x), cu x $\in$ G \{e}sunt formate din elemente care, evident, comută. Deoarece x se poate alege în n-1 moduri, avem cel puţin 1 + 3(n – 1) = 3n – 2 astfel de perechi.	2p
Dacă , x = x^{-1} pentru orice x din G, grupul G este abelian, deci p(G) = n^2. Deoarece $n \geq 3$, avem $n^2 \geq 3n$, deci $p(G) \geq 3n$.	1p
Dacă există x din G astfel încât $x \neq x^{-1}$, atunci perechile (x,x^{-1}),(x^{-1}, x) sunt formate din elemente care comută, sunt diferite de perechile anterioare, deci avem cel puţin 3n-2+2 = 3n perechi care comută, deci $p(G) \geq 3n$.	1p

Subiect 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e şi $f : G \to G$ un endomorfism cu proprietăţile

$f(x) \neq x$, pentru orice $x \in G \setminus \{e\}$.

$f^n(x) = e$, pentru orice $x \in G$. Atunci

a) Să se arate că $F : G \to G$, $F(x) = x^{-1} \cdot f(x)$ este o funcție bijectivă.

b) Să se arate că $x \cdot f(x) \cdot f^2(x) \cdot \ldots f^{n-1}(x) = e$, pentru orice $x \in G$.

(Notăm $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k}$, iar „$\circ$" reprezintă compunerea funcţiilor)

prof. Marian Andronache

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)Dacă F(x) = F(y), atunci $x^{-1} \cdot f(x) = y^{-1} \cdot f(y)$, deci $f(x) \cdot (f(y))^{-1} = x \cdot y^{-1}$. Fie $z = x \cdot y^{-1}$. Avem f(z) = z, deci $z = x \cdot y^{-1} = e$, de unde x = y. Deci funcţia F este injectivă.	3p
G e mulţime finită, prin urmare F este o funcţie bijectivă.	1p
b) Fie $x \in G$. Atunci există $a \in G$ astfel încât F(a) = x, adică $a^{-1} \cdot f(a) = x$. Avem $x \cdot f(x) \cdot f^2(x) \cdot \ldots f^{n-1}(x) =$ $= a^{-1} \cdot f(a) \cdot f(a^{-1}) \cdot f^2(a) \cdot f^2(a^{-1}) \cdot \ldots f^{n-1}(a^{-1} \cdot f(a)) = a^{-1} \cdot a = e$.	3p